

# Konzentrationsungleichungen

## Übungsblatt 9

TU Dortmund, Sommersemester 2017

Prof. Dr. Ivan Veselić, Matthias Täufer

**Übung 17** (4 Punkte). Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige Zufallsvariablen mit  $\mathbb{P}(X_i = 1) = p_i$  und  $\mathbb{P}(X_i = -1) = (1 - p_i)$ . Die Funktion  $f : \{-1, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$  habe die beschränkte-Differenzen-Eigenschaft mit Konstanten  $c_1, \dots, c_n$ . Zeigen Sie:

$$\text{Var}(f(X_1, \dots, X_n)) \leq \sum_{i=1}^n c_i^2 p_i (1 - p_i).$$

**Übung 18** (4 Punkte). Für  $n$  Zahlen  $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$  sei  $g(x_1, \dots, x_n)$  die minimale Anzahl von Teilmengen  $U_1, \dots, U_{g(x_1, \dots, x_n)}$  von  $\{1, \dots, n\}$ , so dass

- $\cup_l U_l = \{1, \dots, n\}$ ,
- $U_l \cap U_k = \emptyset$  für alle  $l \neq k$  und
- $\sum_{i \in U_l} x_i \leq 1$  für alle  $l \in \{1, \dots, g(x_1, \dots, x_n)\}$ .

a) Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in  $[0, 1]$ . Zeigen Sie

$$\text{Var}(g(X_1, \dots, X_n)) \leq \frac{n}{4}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Abschätzung aus a) im Allgemeinen nicht verbessert werden kann, d.h. finden Sie Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$ , so dass

$$\text{Var}(g(X_1, \dots, X_n)) = \frac{n}{4}.$$

Abgabe und Besprechung am 20.06.2017 in der Übung.