Dr. A. Seelmann

Fourieranalysis

TU Dortmund, Sommersemester 2017

Übungsblatt 1

Aufgabe 1) (Fourierkoeffizienten) (3+2=5 Punkte)

(a) Berechnen Sie für die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ jeweils die komplexen Fourierkoeffizienten:

(i) $f(x) = \cos^3(x)$.

(ii) $f(x) = |x|$.

(iii) $f(x) = \begin{cases} 1\,, & 0 < x \leq \pi \\ -1\,, & -\pi < x \leq 0 \end{cases}$.

(b) Für $f \in L^1(\mathbb{T})$ sei $f_m \in L^1(\mathbb{T})$, $m \in \mathbb{N}$, durch $f_m(x) := f(mx)$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Fourierkoeffizienten von f_m durch

$$\widehat{f_m}(n) = \begin{cases} \hat{f}\left(\frac{n}{m}\right) & \text{falls } \frac{n}{m} \in \mathbb{Z}\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben sind.

Aufgabe 2) (Partielle Integration) (2+1=3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für $f, g \in AC(\mathbb{T})$ die partielle Integration

$$\int_{\mathbb{T}} f'(x)g(x)\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{T}} f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

gilt, wobei f' und g' wie in der Bemerkung zu Definition 1.4 der Vorlesung zu verstehen sind.

Tipp: Fubini.

(b) Folgern Sie mit Hilfe von (a): Für $f \in AC(\mathbb{T})$ gilt $\mathrm{i}n\hat{f}(n) = \widehat{f'}(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Abgabe am Freitag, den 28. April 2017, um 12 Uhr.