Dr. A. Seelmann

Fourieranalysis

TU Dortmund, Sommersemester 2017

Übungsblatt 2

Anmerkung: Die Aufgaben 5) und 6) benötigen teilweise Resultate, die erst in der Vorlesung am 8. Mai besprochen werden.

Aufgabe 3) (Stetigkeit der Translation) (3 Punkte)

Sei $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie: Für $f \in L^p(\mathbb{T})$ und $\tau, \tau_0 \in \mathbb{T}$ gilt

$$\lim_{\tau \to \tau_0} \|f(\cdot - \tau) - f(\cdot - \tau_0)\|_{L^p} = 0\,,$$

wobei wie üblich $f(\cdot - \tau)$ die Funktion $\mathbb{T} \ni x \mapsto f(x - \tau)$ bezeichnet.

Tipp: Man betrachte zunächst $f \in C(\mathbb{T})$.

Aufgabe 4) (Konvergenz der arithmetischen Mittel) (3 Punkte)

Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und $b_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ für $n \in \mathbb{N}$ das arithmetischen Mittel der ersten n Folgenglieder.

Zeigen Sie: Gibt es ein $a \in X$ mit $\|a_n - a\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, so gilt auch $\|b_n - a\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, das heißt, konvergiert die Folge (a_n) in der Norm, so tut es auch die Folge (b_n) und zwar gegen denselben Grenzwert.

Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels auch, dass die Umkehrung nicht richtig ist, das heißt, aus der Konvergenz der Folge (b_n) folgt im Allgemeinen nicht die Konvergenz von (a_n).

Aufgabe 5) (Der Fejérkern) (2+3=5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass der *Fejérkern* $F_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=-k}^{k} e_j$, $n \in \mathbb{N}_0$, die Darstellung

$$F_n(x) = \begin{cases} n+1\,, & x = 0 \\ \dfrac{1}{n+1}\,\dfrac{\sin^2(\frac{n+1}{2}x)}{\sin^2(\frac{x}{2})}\,, & x \in \mathbb{T}\setminus\{0\} \end{cases}$$

hat.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a) und Satz 2.3 (a) der Vorlesung, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2 \,\mathrm{d}x = \pi\,.$$

Aufgabe 6) (Partialbruchzerlegung des Cotangens) (5 Punkte)

Für $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ betrachten wir die Funktion $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos(ax)$. Bestimmen Sie die Fourierreihe von f und folgern Sie mit Hilfe eines Satzes aus der Vorlesung, dass

$$\pi\cot(\pi a) = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n}\Big)\,.$$

Abgabe am Freitag, den 12. Mai 2017, um 12 Uhr.