Dr. A. Seelmann

Fourieranalysis

TU Dortmund, Sommersemester 2017

Übungsblatt 3

Aufgabe 7) (Bernstein-Ungleichung für trig. Polynome) (4 Punkte)

Sei P ein trigonometrisches Polynom und $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\hat{P}(k) = 0$ für $|k| > n$. Zeigen Sie, dass

$$\|P'\|_{L^p} \leq 2n\|P\|_{L^p} \quad \text{für} \quad 1 \leq p \leq \infty \,.$$

Tipp: Man zeige $P' = -P * (2nF_{n-1}\sin(n\,\cdot))$.

Aufgabe 8) (Absolut stetige Funktionen) (3 Punkte)

Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$. Zeigen Sie die Umkehrung von Aufgabe 2 (b): Gibt es ein $g \in L^1(\mathbb{T})$ mit $\mathrm{i}n\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, so ist $f \in AC(\mathbb{T})$ mit $f' = g$.

Aufgabe 9) (Lemma von Fejér) (5 Punkte)

Seien $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $g \in L^\infty(\mathbb{T})$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{|n|\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x = \hat{f}(0)\hat{g}(0)\,.$$

Hinweis: Man approximiere f durch trigonometrische Polynome.

Bemerkung: Mit der Wahl $g(x) = e^{-\mathrm{i}x}$ findet man das Lemma von Riemann-Lebesgue (Folgerung 2.7 der Vorlesung) als Spezialfall der obigen Aussage wieder.

Aufgabe 10) (Konvergenz der Abelmittel) (4 Punkte)

Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $r \in [0, 1)$. Zeigen Sie, dass die Abelmittel $A_r f$ die Darstellung

$$A_r f = (1-r)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) r^n \sigma_n f$$

besitzen und folgern Sie: Gilt $(\sigma_n f)(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} c$ für ein $x \in \mathbb{T}$ und ein $c \in \mathbb{C}$, so gilt auch $(A_r f)(x) \xrightarrow[r\to 1-]{} c$.

Hierbei bezeichnet $\sigma_n f$ wie üblich das Fejérmittel von f zum Index n.

Abgabe am Freitag, den 26. Mai 2017, um 12 Uhr.