Dr. A. Seelmann

Fourieranalysis

TU Dortmund, Sommersemester 2017
Übungsblatt 4

Aufgabe 11) (Fourierkoeff. mit Konvexitätsbedingung) (1+1+2=4 Punkte)

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge in $[0,\infty)$ mit

$$a_k - a_{k+1} \leq a_{k-1} - a_k \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $k \cdot (a_k - a_{k+1}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $f_n := \sum_{k=1}^{n} k \cdot (a_{k-1} + a_{k+1} - 2a_k) \cdot F_{k-1}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchyfolge in $L^1(\mathbb{T})$ darstellt. Hierbei bezeichnet F_{k-1} wieder den Fejérkern zum Index $k-1$.

(c) Folgern Sie: Es gibt ein $f \in L^1(\mathbb{T})$ mit $\hat{f}(j) = a_{|j|}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 12) (Fourierkoeffizienten mit exponentiellem Abfall) (5 Punkte)

Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$. Zeigen Sie: Genau dann ist $f \in C^\infty(\mathbb{T}) := \cap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\mathbb{T})$ mit

$$\|f^{(k)}\|_{C(\mathbb{T})} \leq k! R^k \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}$$

für ein $R > 0$, wenn es Konstanten $K, a > 0$ gibt mit

$$|\hat{f}(n)| \leq K \cdot e^{-a|n|} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Tipp: Für eine Richtung betrachte man $|\hat{f}(n)|e^{a|n|}$, für die andere zeige man insbesondere, dass $\sum_{n=1}^{\infty} n^k e^{-an} \leq k! R^k$ für ein geeignetes $R = R(a) > 0$.

Bemerkung: Damit haben genau die analytischen Funktionen auf $\mathbb{T}$ Fourierkoeffizienten mit exponentiellem Abfall.

Aufgabe 13) (Hölderstetige Funktionen) (4 Punkte)

Für $\alpha \in (0,1)$ sei $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ gegeben durch

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{|n|^\alpha}\,, & |n| = 2^k\,, \quad k \in \mathbb{N}_0\,, \\ 0\,, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Reihe $f := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n$ eine Funktion $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$ definiert, deren Fourierkoeffizienten durch $\hat{f}(n) = c_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gegeben sind.

Tipp: Für $h := d_{\mathbb{T}}(x,y) \neq 0$ wähle man $N \in \mathbb{N}$ mit $2^{N-1}h \leq \pi < 2^N h$ und unterteile die Reihe für f in die Terme $|n| \leq 2^N$ und $|n| > 2^N$.

Bemerkung: Damit ist die Aussage von Satz 3.7 der Vorlesung zum Abfallverhalten der Fourierkoeffizienten für Funktionen aus $C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$ im Fall $\alpha < 1$ also optimal.

bitte wenden

Aufgabe 14) (Lipschitzbedingungen) (3 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf (a, b) einer Lipschitzbedingung genügt, d.h. es gibt ein $L > 0$ mit

$$|f(y) - f(x)| \leq L|y - x| \quad \text{für alle} \quad x, y \in (a, b)\,.$$

Finden Sie zwei beschränkte Funktionen $g, h\colon (a, b] \to \mathbb{R}$, die beide auf (a, b) monoton wachsend sind und

$$f = g - h \quad \text{auf} \quad (a, b]$$

erfüllen.