Dr. A. Seelmann

Fourieranalysis

TU Dortmund, Sommersemester 2017

Übungsblatt 5

Anmerkung: Die Aufgaben 17 und 18 behandeln den Raum $A(\mathbb{T})$ der absolut konvergenten Fourierreihen, der in der Vorlesung am 12. Juni 2017 eingeführt wird.

Aufgabe 15) (Sobolevräume und Hölderstetige Fktnen) (2+2=4 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Es gilt $H^1(\mathbb{T}) \subseteq C^{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{T})$.

(b) Es gibt kein $\alpha \in (1/2, 1]$ mit $H^1(\mathbb{T}) \subseteq C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$.

Hinweise:(a) Cauchy-Schwarz; (b) Man betrachte $f(x) = |x|^\beta$ mit geeignetem β.

Aufgabe 16) (Eine divergente Fourierreihe) (1+2+1=4 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir eine stetige Funktion konstruieren, deren Fourierreihe in einem Punkt (hier 0) divergiert.
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(\mathbb{T})$ gibt mit $\|f_n\|_{C(\mathbb{T})} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $|(S_n f_n)(0)| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.
Zeigen Sie damit:

(a) Es gibt streng monoton wachsende Folgen $(n_k), (N_k)$ in $\mathbb{N}$ mit $N_k > n_k$ und

$$\left|\big(S_{n_k}(\sigma_{N_k} f_{n_k})\big)(0)\right| \geq 2^{2k} \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Hierbei bezeichnet $\sigma_{N_k} f_{n_k}$ wieder das entsprechenden Fejérmittel für f_{n_k}.

(b) Mit $r_k := \sum_{j=1}^k (2N_j + 1)$ definiert die Reihe

$$f := \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} e_{r_k} \cdot \sigma_{N_k} f_{n_k}$$

eine stetige Funktion $f \in C(\mathbb{T})$ mit $\hat{f}(j) = 0$ für alle $j \leq 0$ und

$$\hat{f}(r_k + j) = \frac{1}{2^k} \widehat{\sigma_{N_k} f_{n_k}}(j)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \mathbb{Z}$ mit $|j| \leq n_k$.

(c) Die Folge $\big((S_n f)(0)\big)_n$ konvergiert nicht in $\mathbb{C}$.
Tipp: Cauchy-Kriterium.

Aufgabe 17) (Absolut konvergente Fourierreihen) (3 Punkte)

Zeigen Sie: Eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{T})$ gehört genau dann zu $A(\mathbb{T})$, wenn $f = g * h$ mit geeigneten $g, h \in L^2(\mathbb{T})$.

Aufgabe 18) (Optimalität im Satz von Bernstein) (1+1+1+2=5 Punkte)

In dieser Aufgaben wollen wir eine Funktion $f \in C^{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{T}) \setminus A(\mathbb{T})$ konstruieren.
Wir definieren zunächst rekursiv zwei Folgen (P_n) und (Q_n) von trigonometrischen Polynomen durch $P_0 := Q_0 := 1$ und

$$P_{n+1} := P_n + e_{2^n} \cdot Q_n \,, \quad Q_{n+1} := P_n - e_{2^n} \cdot Q_n \,, \quad n \in \mathbb{N}_0 \,.$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt

$$|P_{n+1}|^2 + |Q_{n+1}|^2 = 2\big(|P_n|^2 + |Q_n|^2\big) = 2^{n+2} \,,$$

und somit $\|P_n\|_{C(\mathbb{T})} \leq 2^{(n+1)/2}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Die trigonometrischen Polynome P_n und Q_n haben die Darstellung

$$P_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k e_k \,, \quad Q_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} b_k e_k \,,$$

wobei $a_k, b_k \in \{\pm 1\}$ für alle $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$.

(c) Die Reihe

$$f := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} e_{2^k} \cdot P_k$$

definiert eine Funktion $f \in C(\mathbb{T}) \setminus A(\mathbb{T})$.

(d) Für die Funktion f aus (c) gilt $f \in C^{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{T})$.
Tipp: Man verfahre entsprechend wie in Aufgabe 13) und beachte dabei für $k \leq N$ auch Aufgabe 7) für P_k.