Dr. A. Seelmann

Fourieranalysis

TU Dortmund, Sommersemester 2017

Übungsblatt 6

Aufgabe 19) (Sobolevräume und glm. Konvergenz) (4 Punkte)

Zeigen Sie: Für $f \in C(\mathbb{T}) \cap H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T})$ gilt $\|S_n f - f\|_{C(\mathbb{T})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Tipp: Mit Hilfe von Aufgabe 4) zeige man $\frac{1}{n+1}\sum_{k=-n}^{n} k^2|\hat{f}(k)|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ und folgere, dass $\|S_n f - \sigma_n f\|_{C(\mathbb{T})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Aufgabe 20) (Beweis von Satz 4.15) (2+1+1=4 Punkte)

Sei $\alpha \in (0,1]$ und $f \in BV(\mathbb{T}) \cap C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$.

(a) Zeigen Sie: Für $h \in (0,\pi]$ mit $2\pi/h \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|f(\cdot - h) - f\|_{L^2}^2 \leq \mathrm{const}(f,\alpha) \cdot \mathrm{Var}(f) \cdot h^{\alpha+1}\,,$$

wobei $\mathrm{Var}(f)$ wie üblich die Variation von f bezeichnet.

Hinweis: Man schätze die Summe $\sum_{k=1}^{2\pi/h}|f(x-(k+1)h) - f(x-kh)|^2$ ab und integriere.

(b) Zeigen Sie, dass für $m \in \mathbb{N}_0$ und $h := \frac{\pi}{2^{m+2}}$ die Abschätzung

$$\sum_{2^m \leq |n| < 2^{m+1}} |\hat{f}(n)| \leq \mathrm{const} \cdot 2^{m/2} \cdot \|f(\cdot - h) - f\|_{L^2}$$

gilt.

Tipp: Man studiere die Beweise der Sätze 4.11 und 4.14 der Vorlesung.

(c) Folgern Sie, dass $f \in A(\mathbb{T})$.

Aufgabe 21) (Verallgemeinerte Young-Ungleichung) (5 Punkte)

Seien $1 \leq p,q,r \leq \infty$ mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \in [0,1]$ (wobei wie üblich $\frac{1}{\infty} := 0$). Zeigen Sie:
Für $f \in L^p(\mathbb{T})$ und $g \in L^q(\mathbb{T})$ ist $f * g \in L^r(\mathbb{T})$ mit $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$.
Tipp: Für $1 < q < \infty$ Hölder und Interpolation.

Aufgabe 22) (Abs. stetige Fkten und abs. konv. Fourierreihen) (3 Punkte)

Sei $f \in AC(\mathbb{T})$ mit $f' \in L^p(\mathbb{T})$ für ein $p > 1$. Zeigen Sie, dass dann $f \in A(\mathbb{T})$.

Abgabe am Montag, den 10. Juli 2017, um 12 Uhr.