Dr. A. Seelmann

Fourieranalysis

TU Dortmund, Sommersemester 2017

Übungsblatt 7

Aufgabe 23) (Die Hilberttransformation) (1+2+2+2+1=8 Punkte)

Wir wollen in dieser Aufgabe zeigen, dass die Hilberttransformierte Hf für $f \in L^2(\mathbb{T})$ die Darstellung

$$(Hf)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon < |\tau| < \pi} f(t-\tau) \cot\Big(\frac{\tau}{2}\Big) \,\mathrm{d}\tau \tag{1}$$

für Lebesgue-fast alle $t \in \mathbb{T}$ besitzt.

(a) Zeigen Sie, dass $(HD_n)(t) = \cot\big(\frac{t}{2}\big) - \frac{\cos((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}$ für $t \neq 0$, wobei D_n wie üblich den Dirichletkern bezeichnet.

(b) Zeigen Sie für jedes trigonometrische Polynom p, dass

$$(Hp)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \cot\Big(\frac{\tau}{2}\Big)\big(p(t-\tau) - p(t)\big) \,\mathrm{d}\tau = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon < |\tau| < \pi} p(t-\tau) \cot\Big(\frac{\tau}{2}\Big) \,\mathrm{d}\tau$$

für alle $t \in \mathbb{T}$.

Tipps: Man betrachte $(HD_n) * p = D_n * (Hp)$; cot ist ungerade.

(c) Zeigen Sie für $f \in L^1(\mathbb{T})$ die Abschätzung

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{1-r < |\tau| < \pi} \cot\Big(\frac{\tau}{2}\Big) f(t-\tau) \,\mathrm{d}\tau - (Q_r * f)(t) \right| \leq 4 \cdot M_f(t)\,, \quad t \in \mathbb{T}\,,\ 0 \leq r < 1\,,$$

wobei M_f die Hardy-Littlewood Maximalfunktion zu f und $Q_r = HP_r$ den konjugierten Poissonkern bezeichnet.

Hinweis: Man zeige $|Q_1(\tau) - Q_r(\tau)| = \frac{1-r}{1+r}|Q_1(\tau)|P_r(\tau) \leq \pi P_r(\tau)$ für $1 - r \leq |\tau| < \pi$ mit $Q_1(\tau) := \lim_{r \to 1-} Q_r(\tau)$ sowie $|Q_r(\tau)| \leq \frac{2}{1-r}$ für $|\tau| \leq 1 - r$. Man beachte ferner Lemma 6.5 der Vorlesung.

(d) Zeigen Sie für $f \in L^1(\mathbb{T})$ mit Hilfe von (b) und (c), dass

$$\frac{1}{2\pi} \int_{1-r < |\tau| < \pi} \cot\Big(\frac{\tau}{2}\Big) f(t-\tau) \,\mathrm{d}\tau - (Q_r * f)(t) \xrightarrow[r \to 1-]{} 0$$

für Lebesgue-fast alle $t \in \mathbb{T}$.

(e) Folgern Sie (1) für $f \in L^2(\mathbb{T}) \subseteq L^1(\mathbb{T})$.

Bemerkung: Aufgrund von (1) und $\cot(\frac{\cdot}{2}) \notin L^1(\mathbb{T})$ bezeichnet man die Hilberttransformation H auch als *singulären Integraloperator*.

bitte wenden

Aufgabe 24) (Poissonintegrale) (1+1+1=3 Punkte)

Sei $u\colon \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ in $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ harmonisch. Für $0 \leq r \leq 1$ definieren wir $u_r\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ durch $u_r(t) := u(re^{\mathrm{i}t})$. Zeigen Sie:

(a) Genau dann ist $u \in C(\overline{\mathbb{D}})$, wenn $u_1 \in C(\mathbb{T})$ und $u_r = P_r * u_1$ für alle $0 \leq r < 1$.
Hinweis: Schwaches Maximumprinzip.

(b) Für $0 \leq r, s < 1$ gilt $u_{r\cdot s} = P_r * u_s$.

(c) Für alle $1 \leq p \leq \infty$ ist die Funktion $[0,1) \ni r \to \|u_r\|_{L^p}$ monoton wachsend.

Aufgabe 25) (Eine nirgends differenzierbare Funktion) (1+2+2=5 Punkte)

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $J_n := \|F_n\|_{L^2}^{-2} F_n^2$ der sogenannte *Jacksonkern*. Zeigen Sie, dass $\hat{J}_n(0) = 1$ und

$$J_n(t) \leq \frac{2\pi^4}{n^3 t^4} \quad \text{für} \quad 0 < |t| < \pi\,.$$

Hinweise: $F_n(t) \leq \frac{\pi^2}{(n+1)t^2}$ und $\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(b) Sei $f \in C(\mathbb{T})$ und es gebe $k \in \mathbb{Z}$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $\hat{f}(j) = 0$ für alle $j \in \mathbb{Z}$ mit $1 \leq |k-j| \leq 2N$. Zeigen Sie: Gilt zusätzlich $\sup_{0<|t|<N^{-1/4}} \left|\frac{f(t)}{t}\right| < \infty$, so

$$|\hat{f}(k)| \leq 2\pi^4 \cdot \left(N^{-1} \cdot \sup_{0<|t|<N^{-1/4}} \left|\frac{f(t)}{t}\right| + N^{-2} \cdot \|f\|_{L^1}\right).$$

Tipp: $\hat{f}(k) = \widehat{f \cdot J_N}(k)$ (warum?) und Aufteilung des Integrationsbereichs $(-\pi, \pi)$ in $0 < |t| < N^{-1}$, $N^{-1} < |t| < N^{-1/4}$ und $N^{-1/4} < |t| < \pi$.
Bemerkung: Man kann hier ohne Probleme auch $f \in L^1(\mathbb{T})$ statt $f \in C(\mathbb{T})$ betrachten, wenn man sup durch ess-sup ersetzt.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von (b): Die Reihe

$$g(t) := \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \cos(2^j t)$$

definiert eine Funktion $g \in C(\mathbb{T})$, die nirgendwo differenzierbar ist.
Hinweis: Widerspruchsbeweis mit $f(t) := g(t+x) - g(x)\cos(t) - g'(x)\sin(t)$.
Bemerkung: Mit einer geringfügigen Modifikation des Beweises von Aufgabe 13 kann man zeigen, dass $g \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$ für alle $0 < \alpha < 1$.