

KURZZUSAMMENFASSUNG ZU KOMPLEXEN MASSEN

Diese Notiz stellt eine Kurzzusammenfassung zu komplexen Maßen auf  $\mathbb{T}$  und der Integration bezüglich dieser Maße dar. Es wird kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben. Für eine ausführlichere Darstellung sei auf gängige Literatur wie Rudin: *Real and Complex Analysis*, Chapter 6 oder auch Werner: *Funktionalanalysis*, Beispiel I.1 (j), Theorem II.2.5 und Anhang A.4 verwiesen.

Es bezeichne  $\mathfrak{B}$  die Borelsche  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{T}$ .

Eine Abbildung  $\mu: \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *komplexes Maß*, wenn sie  $\sigma$ -additiv ist, d.h. wenn für paarweise disjunkte  $B_1, B_2, \dots \in \mathfrak{B}$  die Identität

$$\mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(B_j) \quad (1)$$

gilt. Man beachte, dass hierbei die Konvergenz der Reihe auf der rechten Seite von (1) wegen der Komplexwertigkeit von  $\mu$  Teil der Definition ist. Ferner ist die linke Seite von (1) (und somit auch die rechte) invariant unter Umordnungen, weshalb die Reihe automatisch absolut konvergent ist. Wegen  $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$  folgt aus (1) außerdem  $\mu(\emptyset) = 0$ .

Die Menge der komplexen Maße auf  $\mathbb{T}$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ . Diese Menge bildet offenbar auf natürliche Weise einen Vektorraum. Ferner liegen mit  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$  auch  $\bar{\mu}$ ,  $\operatorname{Re} \mu$ ,  $\operatorname{Im} \mu$  in  $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ , wobei  $\bar{\mu}(B) = \overline{\mu(B)}$ ,  $(\operatorname{Re} \mu)(B) = \operatorname{Re} \mu(B)$  und  $(\operatorname{Im} \mu)(B) = \operatorname{Im} \mu(B)$  für  $B \in \mathfrak{B}$ .

Für  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$  definiert

$$|\mu|(B) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |\mu(B_j)| \mid n \in \mathbb{N}, B = \bigcup_{j=1}^n B_j, B_j \in \mathfrak{B} \text{ paarweise disjunkt} \right\}$$

ein positives Maß auf  $\mathbb{T}$  mit  $|\mu(B)| \leq |\mu|(B)$  für alle  $B \in \mathfrak{B}$ , das sogenannte *Variationsmaß* zu  $\mu$ . Ferner definiert  $\|\mu\| := |\mu|(\mathbb{T})$  eine Norm auf  $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ , die sogenannte *Variationsnorm*. Der so normierte Raum  $(\mathcal{M}(\mathbb{T}), \|\cdot\|)$  ist vollständig.

Sei  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ . Dann können  $\operatorname{Re} \mu$  und  $\operatorname{Im} \mu$  jeweils als Differenz zweier positiver Maße geschrieben werden (*Hahn-Jordan-Zerlegung*), so dass

$$\mu = (\mu_1 - \mu_2) + i(\mu_3 - \mu_4)$$

mit positiven Maßen  $\mu_1, \dots, \mu_4$  auf  $\mathbb{T}$ ; insbesondere gilt  $|\mu| \leq \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$  und  $\mu_j \leq |\mu|$  für alle  $j \in \{1, \dots, 4\}$ .

Eine messbare Funktion  $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt  $\mu$ -*integrierbar*, wenn sie  $|\mu|$ -integrierbar ist, und in dem Fall setzt man

$$\int_{\mathbb{T}} f \, d\mu := \int_{\mathbb{T}} f \, d\mu_1 - \int_{\mathbb{T}} f \, d\mu_2 + i \int_{\mathbb{T}} f \, d\mu_3 - i \int_{\mathbb{T}} f \, d\mu_4.$$

Es gilt die wichtige Ungleichung

$$\left| \int_{\mathbb{T}} f \, d\mu \right| \leq \int_{\mathbb{T}} |f| \, d|\mu|.$$

**Beispiel 1.** (a) Jedes  $f \in L^1(\mathbb{T})$  vermittelt über  $\mu_f(B) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \chi_B(t) f(t) \, dt$ ,  $B \in \mathfrak{B}$ , ein komplexes Maß  $\mu_f \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$  mit  $|\mu_f|(B) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \chi_B(t) |f(t)| \, dt$  und insbesondere  $\|\mu_f\| = \|f\|_{L^1}$ . Ferner ist eine messbare Funktion  $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  genau dann  $\mu_f$ -integrierbar, wenn  $g \cdot f \in L^1(\mathbb{T})$ , und in dem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{T}} g(t) \, d\mu(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(t) f(t) \, dt.$$

(b) Für  $a \in \mathbb{T}$  definiert

$$\delta_a(B) := \begin{cases} 1, & a \in B \\ 0, & a \notin B \end{cases}, \quad B \in \mathfrak{B}.$$

ein positives Maß  $\delta_a \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ , das sogenannte Diracmaß in  $a$ . Dieses Maß besitzt keine Darstellung der Form  $\delta_a = \mu_f$  mit  $\mu_f$  wie in (a).

Für  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$  definiert

$$C(\mathbb{T}) \ni f \mapsto (T\mu)(f) := \int_{\mathbb{T}} f \, d\mu$$

eine stetige lineare Abbildung mit  $|(T\mu)(f)| \leq \int_{\mathbb{T}} |f| \, d|\mu| \leq \|f\|_{C(\mathbb{T})} \cdot \|\mu\|$ , also  $T\mu \in C(\mathbb{T})'$ , wobei  $C(\mathbb{T})'$  den Dualraum von  $C(\mathbb{T})$  bezeichnet. Tatsächlich ist jede stetige lineare Abbildung aus  $C(\mathbb{T})'$  von dieser Form:

**Satz 2** (Rieszscher Darstellungssatz). *Die Zuordnung  $\mathcal{M}(\mathbb{T}) \ni \mu \mapsto T\mu$  vermittelt einen linearen isometrischen Isomorphismus zwischen  $\mathcal{M}(\mathbb{T})$  und  $C(\mathbb{T})'$ , d.h. die Zuordnung ist linear und bijektiv mit*

$$\|T\mu\| := \sup_{\substack{f \in C(\mathbb{T}) \\ \|f\|_{C(\mathbb{T})}=1}} |(T\mu)(f)| = \|\mu\| \quad \text{für alle } \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}).$$