KURZZUSAMMENFASSUNG L^p-RÄUME

Dieses Dokument stellt eine Zusammenfassung zu den L^p-Räumen dar, wie sie im Rahmen der Vorlesung „Fourieranalysis“ verwendet werden. Es wird kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben. Auf Beweise wird in der Regel verzichtet, einige Beweise werden jedoch kurz skizziert. Für eine ausführlichere Darstellung der Materie sei auf gängige Literatur verwiesen, wie z.B. Elstrodt: *Maß- und Integrationstheorie*, Springer.

Im Folgenden setzen wir die Kenntnis der Definition des Lebesgueintegrals für messbare, reellwertige Funktionen voraus. Dies schließt die Kenntnis der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, des Lebesguemaßes λ_n auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und des Begriffs der Nullmenge ein.

Komplexwertige Funktionen. Zunächst weiten wir den Integralbegriff auf komplexwertige Funktionen aus: Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt messbar, wenn $\mathrm{Re}\,(f)$ und $\mathrm{Im}\,(f)$ im herkömmlichen Sinne messbar sind. Entsprechend heißt f (Lebesgue-)integrierbar, wenn $\mathrm{Re}\,(f)$ und $\mathrm{Im}\,(f)$ es sind. In diesem Fall schreibt man

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Re}\,f(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Im}\,f(x)\,\mathrm{d}x\,;$$

hierbei verwenden wir die Schreibweise $\int_{\mathbb{R}^n} \ldots \mathrm{d}x$ für das Lebesgueintegral über $\mathbb{R}^n$.

Für eine Borelmenge $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ schreiben wir

$$\int_{\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_\Omega(x)\mathrm{d}x$$

mit $\chi_\Omega(x) = 1$ für $x \in \Omega$ und $\chi_\Omega(x) = 0$ sonst. Umgekehrt nennen wir $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ integrierbar (über Ω), wenn die triviale Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}^n$ (durch 0) integrierbar ist.

Man sieht leicht, dass mit dieser Ausweitung des Integralbegriffes eine messbare komplexwertige Funktionen f genau dann integrierbar ist, wenn es ihr Betrag $|f|$ ist; es gilt dann

$$\left|\int f\,\mathrm{d}x\right| \le \int |f|\,\mathrm{d}x\,.$$

Auch viele weitere Eigenschaften des Integrals wie Linearität bzgl. des Integranden und Additivität bzgl. des Integrationsbereichs bleiben in natürlicher Weise erhalten.

Die Räume $\mathcal{L}^p$. Im Folgenden sei stets $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ eine Borelmenge und $1 \le p \le \infty$. Für $p < \infty$ definiert man

$$\mathcal{L}^p(\Omega) := \big\{ f\colon \Omega \to \mathbb{C} \;\text{ messbar } \big|\; |f|^p \text{ integrierbar über } \Omega \big\}$$

sowie

$$\|f\|_p := \Big(\int_\Omega |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{1/p} \quad \text{für} \quad f \in \mathcal{L}^p(\Omega)\,.$$

Im Fall $p = \infty$ setzt man

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) := \big\{ f\colon \Omega \to \mathbb{C} \;\text{ messbar } \big|\; \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| < \infty \big\}$$

und

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| \quad \text{für} \quad f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)\,,$$

wobei $\operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| := \inf\{M \ge 0 \mid |f| \le M \text{ fast überall}\}$ das sogenannte *essentielle Supremum* von f (genauer von $|f|$) bezeichnet.

Offenbar ist $\mathcal{L}^p(\Omega)$ stets ein Vektorraum. In der Tat ist dies für $p = \infty$ und $p = 1$ sofort ersichtlich, und für $1 < p < \infty$ folgt es mit Hilfe der elementaren Ungleichungskette

$$|f+g|^p \le (|f| + |g|)^p \le 2^p \max\{|f|, |g|\}^p \le 2^p\big(|f|^p + |g|^p\big)\,.$$

Die Ungleichungen von Hölder und Minkowski. Ein zentrales Resultat zu den $\mathcal{L}^p$-Räumen ist die sogenannte *Höldersche Ungleichung*. Ihr Beweis lässt sich im Wesentlichen auf die Konvexität der Exponentialfunktion und die Monotonie des Integrals bzgl. des Integranden reduzieren. Für eine einfachere Formulierung vereinbaren wir $1/\infty := 0$.

Satz 1 (Höldersche Ungleichung)**.** *Seien* $1 \le p, q \le \infty$ *mit* $1/p + 1/q = 1$*,* $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ *und* $g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$*. Dann gilt* $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ *mit*

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q\,.$$

Ist speziell das Lebesguemaß $\lambda_n(\Omega)$ von Ω endlich, so erhalten wir die folgende Schachtelung der $\mathcal{L}^p$-Räume.

Korollar 2. *Falls* $\lambda_n(\Omega) < \infty$*, so gilt für* $p \ge q$ *die Inklusion* $\mathcal{L}^p(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^q(\Omega)$ *mit*

$$\|f\|_q \le \lambda_n(\Omega)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \cdot \|f\|_p \quad \textit{für alle} \quad f \in \mathcal{L}^p(\Omega)\,.$$

Beweis. Nur der Fall $q < p < \infty$ ist nicht direkt klar. Wende hier Hölder auf die Funktionen $|f|^q \in \mathcal{L}^{p/q}(\Omega)$ und $1 \in \mathcal{L}^{p/(p-q)}(\Omega)$ an. □

Man beachte, dass im Fall $\lambda_n(\Omega) = \infty$ im Allgemeinen keine Inklusion zwischen den Räumen $\mathcal{L}^p(\Omega)$ und $\mathcal{L}^q(\Omega)$ mehr richtig ist, wie man sich leicht anhand von $\Omega = \mathbb{R}$ klar macht.

Ebenfalls mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung zeigt man die *Minkowskische Ungleichung*, die der Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_p$ entspricht.

Satz 3 (Minkowskische Ungleichung)**.** *Für* $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ *gilt* $\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$*.*

Beweis. Für $p = 1$ und $p = \infty$ ist das klar. Für $1 < p < \infty$ schreibt man

$$|f+g|^p = |f+g|^{p-1}|f+g| \le |f+g|^{p-1}|f| + |f+g|^{p-1}|g|$$

und integriert unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung. □

Offenbar gilt für $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ stets

$$\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p\,.$$

In Anbetracht der Minkowskischen Ungleichung stellt sich daher die Frage, ob $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf $\mathcal{L}^p(\Omega)$ definiert. Tatsächlich ist $\|\cdot\|_p$ jedoch nicht positiv definit: Es gilt genau dann $\|f\|_p = 0$ wenn $f = 0$ fast überall. In dem Fall darf f also auf einer Nullmenge von 0 verschieden sein. In diesem Sinne stellt $\|\cdot\|_p$ auf $\mathcal{L}^p(\Omega)$ lediglich eine *Halbnorm* dar.

Cauchyfolgen und dichte Teilmengen. In Analogie zu normierten Räumen nennen wir eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^p(\Omega)$ eine *Cauchyfolge in* $\mathcal{L}^p(\Omega)$, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\|f_k - f_l\|_p < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad k, l \ge k_0(\varepsilon)\,.$$

Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt gegen $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ *in* $\mathcal{L}^p(\Omega)$ *konvergent*, wenn

$$\|f_k - f\|_p \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,.$$

Man beachte, dass hierbei die Grenzfunktion f wegen der fehlenden Definitheit von $\|\cdot\|_p$ nicht eindeutig bestimmt ist, da man f auf Nullmengen beliebig abändern kann ohne die Konvergenz zu beeinflussen.

Natürlich ist jede in $\mathcal{L}^p(\Omega)$ konvergente Folge auch eine Cauchyfolge. Die Umkehrung wird durch den Satz von Riesz-Fischer sichergestellt.

Satz 4 (Der Satz von Riesz-Fischer)**.** *Sei* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchyfolge in* $\mathcal{L}^p(\Omega)$*. Dann gibt es ein* $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ *so, dass* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathcal{L}^p(\Omega)$ *gegen* f *konvergiert. Ferner gibt es eine Teilfolge* $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ *von* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *derart, dass* $f_{k_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} f$ *fast überall punktweise.*

Bemerkung 5. *Der Zusatz zur punktweisen Konvergenz fast überall geht auf Hermann Weyl zurück. Man beachte, dass hierbei der Übergang zu einer Teilfolge wesentlich ist, wie man sich für $\Omega = \mathbb{R}$ anhand der Folge $f_k = \chi_{[j2^{-l},(j+1)2^{-l}]}$ klar macht, wobei $k = 2^l + j$ mit $l \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq j < 2^l$.*

Das folgenden Resultat ist schließlich zur Approximation von $\mathcal{L}^p$-Funktionen relevant.

Satz 6. *Sei $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig.*

(a) *Es gibt eine Treppenfunktion $g \in \operatorname{Span}\{\chi_A \mid \lambda_n(A) < \infty\} \subseteq \mathcal{L}^p(\Omega)$ mit $\|f - g\|_p < \varepsilon$.*
(b) *Ist Ω offen und $p < \infty$, so gibt es eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ und eine stetige Funktion $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $g(x) = 0$ für alle $x \in \Omega \setminus K$ und $\|f - g\|_p < \varepsilon$.*

Bemerkung 7. *Die Funktion g in Teil b) von Satz 6 kann sogar so gewählt werden, dass zusätzlich $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ unendlich oft differenzierbar ist.*

Die Räume L^p. Der Umstand, dass $\|\cdot\|_p$ nur eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p(\Omega)$ darstellt, ist vom topologischen Standpunkt aus unbefriedigend. Man behilft sich hier, indem man Funktionen in $\mathcal{L}^p(\Omega)$ miteinander identifiziert, die außerhalb einer Nullmenge übereinstimmen. Formal setzt man

$$\mathcal{N}(\Omega) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{C} \text{ messbar} \mid f = 0 \text{ fast überall}\} \subseteq \mathcal{L}^p(\Omega)$$

und betrachtet den Quotientenvektorraum

$$L^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega)/\mathcal{N}(\Omega)\,.$$

Die Elemente von $L^p(\Omega)$ bestehen nun streng genommen nicht mehr aus Funktionen, sondern aus Äquivalenzklassen $[f]$ mit Repräsentanten $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$. Dennoch behandelt man die Äquivalenzklassen in der Regel so, als wären es Funktionen und schreibt $f \in L^p(\Omega)$ statt $[f] \in L^p(\Omega)$. Dies führt solange nicht zu Komplikationen, wie die auftretenden Terme oder Aussagen nicht vom gewählten Vertreter der jeweiligen Äquivalenzklasse abhängen. So ist z.B. die Zuordnung

$$L^p(\Omega) \ni f \mapsto \|f\|_p \tag{$*$}$$

wohldefiniert, nicht jedoch die Punktauswertung $f \mapsto f(x)$ für festes $x \in \Omega$.

In diesem Sinne gelten die Ungleichungen von Hölder und Minkowski auch für $L^p(\Omega)$ statt $\mathcal{L}^p(\Omega)$, so dass wir $L^p(\Omega)$ über $(*)$ mit einer Norm versehen können; diese notieren wir zur Einfachheit wieder mit $\|\cdot\|_p$. Auch der Satz von Riesz-Fischer und die Approximationsresultate aus Satz 6 bleiben entsprechend für $L^p(\Omega)$ statt $\mathcal{L}^p(\Omega)$ richtig. Insbesondere ist der nun normierte Raum $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ im herkömmlichen Sinne vollständig.