Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 17. Juli 2017

Topologie

5.4 Zerlegungen der Eins

In der Analysis und der Maßtheorie ist es manchmal nützlich, Funktionen in solche mit „kleinen“ Trägern zu zerlegen.

Definition 5.4.1 . Es sei X ein topologischer Raum, $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $E := \{\, x \in X : f(x) \neq 0 \,\}$. Dann heißt $\overline{E}$ der *Träger* von f und wird mit $\operatorname{Tr} f$ oder $\operatorname{supp} f$ (Englisch: support) bezeichnet.

Definition 5.4.2 . Es sei X ein topologischer Raum und A eine Indexmenge.

(a) Ein System $\mathscr{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{A}}$ von Teilmengen von X heißt *Überdeckung* von X, wenn $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathsf{A}} = X$. Eine Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{A}}$ von X heißt *offene Überdeckung* bzw. *abgeschlossene Überdeckung* von X, wenn alle Mengen U_α offen bzw. abgeschlossen sind. Eine Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{A}}$ von X heißt *endlich* bzw. *abzählbar*, wenn die Indexmenge A endlich bzw. abzählbar ist.

(b) Ein System $\mathscr{E} = (E_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{A}}$ von Teilmengen von X heißt *lokalendlich*, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung U von x gibt, die nur endlich viele der E_α schneidet. Weiter heißt $\mathscr{E}$ *punktendlich*, wenn jeder Punkt $x \in X$ nur in endlich vielen der E_α liegt.

Offenbar ist jede lokalendliche Überdeckung von X auch punktendlich. Aber die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Dazu sei $X = \left\{\, \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \,\right\} \cup \{0\}$ versehen mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Topologie und $\mathscr{E} = \left\{\, \left\{\frac{1}{n}\right\} : n \in \mathbb{N} \,\right\} \cup \{X\}$. Dann ist $\mathscr{E}$ eine punktendliche aber keine lokalendliche Überdeckung von X, da jede Umgebung von 0 unendlich viele der Punkte $\frac{1}{n}$ enthält.

Satz 5.4.3 . *Es sei X ein normaler Raum, $F \subset X$ abgeschlossen und $\mathscr{E} = (E_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{A}}$ ein punktendliches System offener Mengen, das F überdeckt. Dann gibt es eine offene Überdeckung $\mathscr{G} = (G_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{A}}$ von F mit $\overline{G}_\alpha \subset E_\alpha$.*

Beweis. Es sei $\mathscr{M}$ die Familie aller offenen Überdeckungen von F der Gestalt $(G_\beta)_{\beta\in\mathsf{B}} \cup (E_\gamma)_{\gamma\in\mathsf{C}}$ mit $\mathsf{B}\cup\mathsf{C}=\mathsf{A}$, $\mathsf{B}\cap\mathsf{C}=\emptyset$ und $\overline{G}_\beta \subset E_\beta$ für $\beta\in\mathsf{B}$. Für $\mathsf{B}=\emptyset$ und $\mathsf{C}=\mathsf{A}$ sind alle Bedingungen erfüllt und daher $\mathscr{M}\neq\emptyset$.
Sind $\mathscr{H}=(G_\beta)_{\beta\in\mathsf{B}}\cup(E_\gamma)_{\gamma\in\mathsf{C}}$ und $\mathscr{H}'=(G'_\beta)_{\beta\in\mathsf{B}'}\cup(E'_\gamma)_{\gamma\in\mathsf{C}'}$ Überdeckungen aus $\mathscr{M}$, so sei $\mathscr{H}\prec\mathscr{H}'$, wenn $\mathsf{B}\subset\mathsf{B}'$ und $B_\beta=B'_\beta$ für alle $\beta\in\mathsf{B}$. Wir zeigen, dass $\mathscr{M}$ durch die Relation $\prec$ induktiv geordnet ist.
Zum Beweis betrachten wir eine linear geordnete Teilfamilie $(\mathscr{H}^s)_{s\in S}$ von $\mathscr{M}$. Zu $\mathscr{H}^s$ mögen die Indexmengen B^s und C^s mit $\mathsf{B}^s\cup\mathsf{C}^s=\mathsf{A}$ und $\mathsf{B}^s\cap\mathsf{C}^s=\emptyset$ gehören. Für $\mathsf{B}:=\bigcup\limits_{s\in S}\mathsf{B}^s$ und $\mathsf{C}:=\bigcup\limits_{s\in S}\mathsf{C}^s$ gilt $\mathsf{B}\cup\mathsf{C}=\mathsf{A}$ und $\mathsf{B}\cap\mathsf{C}=\emptyset$.
Nun sei $\mathscr{H}=(G_\beta)_{\beta\in\mathsf{B}}\cup(E_\gamma)_{\gamma\in\mathsf{C}}$ mit $G_\beta=G^s_\beta$ für $\beta\in\mathsf{B}^s$. Wegen der Definition der Ordnung auf $\mathscr{M}$ ist $\mathscr{H}$ wohldefiniert und besteht aus offenen Mengen. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\mathscr{H}$ eine Überdeckung von F ist. Dazu sei $x\in F$. Dann ist $\mathsf{P}(x):=\{\,\alpha\in\mathsf{A}: x\in E_\alpha\,\}$ endlich. Für $\alpha\in\mathsf{P}(x)\cap\mathsf{C}$ gilt $E_\alpha\in\mathscr{H}$ und $x\in E_\alpha$. Also bleibt noch der Fall $\mathsf{P}(x)\subset\mathsf{B}$. Wegen der linearen Ordnung gilt bereits $\mathsf{P}(x)\subset\mathsf{B}^s$ für ein $s\in S$. Da $\mathscr{H}^s$ eine Überdeckung ist, gilt $x\in E_\mu$ für ein $\mu\in\mathsf{B}^s\subset\mathscr{B}$.
Damit ist $\mathscr{M}$ induktiv geordnet und nach dem Lemma von Zorn existiert ein maximales Element $\mathscr{H}^*=(G_\beta)_{\beta\in\mathsf{B}^*}\cup(E_\gamma)_{\gamma\in\mathsf{C}^*}$. Ist $\mathsf{C}^*\neq\emptyset$, so sei $\alpha\in\mathsf{C}^*$ ein fester Index. Dann ist $A:=F\setminus\left(\bigcup\limits_{\beta\in\mathsf{B}^*}G_\beta\cup\bigcup\{\,E_\gamma:\gamma\in\mathsf{C}^*,\ \gamma\neq\alpha\,\}\right)$ abgeschlossen. Da $\mathscr{H}^*$ eine Überdeckung ist, gilt $A\subset E_\alpha$. Wegen der Normalität von X gibt es eine offene Menge G_α mit $A\subset G_\alpha\subset\overline{G}_\alpha\subset E_\alpha$. Dann ist aber $\mathscr{H}':=(G_\beta)_{\beta\in\mathsf{B}^*}\cup(G_\alpha)\cup(E_\gamma)_{\gamma\in\mathsf{C}^*,\ \gamma\neq\alpha}$ ein Element von $\mathscr{M}$ mit $\mathscr{H}'\succ\mathscr{H}^*$ im Widerspruch zur Maximalität von $\mathscr{H}^*$. Also ist $\mathsf{C}^*=\emptyset$. □

Definition 5.4.4. Es sei X ein topologischer Raum und $\mathscr{U}=(U_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{A}}$ eine offene Überdeckung von X. Dann heißt ein System von Funktionen $f_\alpha\colon X\to\mathbb{R}$ eine zu $\mathscr{U}$ *passende Zerlegung der Eins*, wenn Folgendes gilt:

(a) $f_\alpha(x)\geq 0$ für alle $x\in X$ und alle $\alpha\in\mathsf{A}$;

(b) $(\operatorname{supp} f_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{A}}$ bilden ein lokalendliches System;

(c) für $\alpha\in\mathsf{A}$ ist $\operatorname{supp} f_\alpha\subset U_\alpha$;

(d) $\sum\limits_{\alpha\in\mathsf{A}} f_\alpha(x)=1$ für alle $x\in X$.

Hierbei ist zu beachten, dass wegen (b) die Summe in (d) für jedes $x\in X$ endlich ist. Sind alle f_α stetig, so ist auch diese Summe stetig.

Satz 5.4.5. *Es sei X ein normaler Raum und $\mathscr{U}=(U_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{A}}$ eine lokalendliche, offene Überdeckung von X. Dann gibt es eine zu $\mathscr{U}$ passende Zerlegung der Eins.*

Beweis. Nach Satz existiert eine offene Überdeckung $\mathscr{V}=(V_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{A}}$ von X mit $\overline{V}_\alpha\subset U_\alpha$. Wegen der Normalität von X gibt es zu jedem $\alpha\in\mathsf{A}$ eine offene Menge W_α mit $\overline{V}_\alpha\subset$

$W_\alpha \subset \overline{W}_\alpha \subset U_\alpha$. Nach dem Lemma von Urysohn gibt es zu jedem $\alpha \in \mathsf{A}$ eine stetige Funktion $g_\alpha\colon X \to [0,1]$ mit $g_\alpha(x) = 1$ für $x \in \overline{V}_\alpha$ und $g_\alpha(x) = 0$ für $x \in X \setminus W_\alpha$. Weiter gilt $\operatorname{supp} g_\alpha \subset \overline{W}_\alpha \subset U_\alpha$. Nun ist die Funktion $g\colon X \to [0,\infty)$ mit $g(x) := \sum\limits_{\alpha\in\mathsf{A}} g_\alpha(x)$ wohldefiniert und stetig. Da $(V_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{A}}$ eine Überdeckung von X ist, gilt $g(x) \geq 1$ für alle $x \in X$. Dann bilden die Funktionen $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{A}}$ mit $f_\alpha(x) = \frac{g_\alpha(x)}{g(x)}$ eine zu $\mathscr{U}$ passende Zerlegung der Eins. □

Folgerung 5.4.6. *Es sei X ein normaler Raum, F eine abgeschlossene Teilmenge von X und $\mathscr{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{A}}$ eine lokalendliche, offene Überdeckung von F. Dann gibt es eine Familie $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{A}}$ stetiger Funktionen $f_\alpha\colon X \to [0,1]$, sodass $f_\alpha(x) = 0$ für $x \notin U_\alpha$ und $\sum\limits_{\alpha\in\mathsf{A}} f_\alpha(x) = 1$ für alle $x \in F$.*

Beweis. Wir ergänzen $\mathscr{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{A}}$ durch $X \setminus F$ zu einer offenen Überdeckung von X und wenden den vorigen Satz an. □

Zerlegungen der Eins erlauben es, Untersuchungen über Funktionen auf die Untersuchung von Funktionen mit „kleinen“ Trägern zurückzuführen. In der Integrationstheorie werden z.B. lokalkompakte Räume untersucht und Integrale als positive Linearformen auf den Funktionen mit kompakten Trägern definiert. Diese Definition lässt sich mittels Zerlegungen der Eins auf größere Funktionenklassen ausdehnen.

Ein anderes Beispiel betrifft Mannigfaltigkeiten. Diese Räume besitzen für jeden Punkt eine Umgebung, die homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist. Durch Verwendung von Zerlegungen der Eins lassen sich Untersuchungen von Funktionen, die auf einer Mannigfaltigkeit definiert sind, auf die Betrachtung von Funktionen, die auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert sind und außerhalb einer kompakten Menge verschwinden (d.h. gleich 0 sind).

Schließlich werden Zerlegungen der Eins bei Beweisen von Metrisationssätzen benutzt. Dies sind Sätze, die hinreichende oder notwendige Bedinungen für die Metrisierbarkeit von topologischen Räumen sind.