

Perkolationstheorie

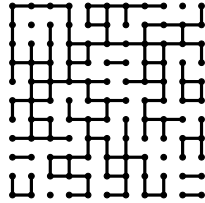
Übungsblatt 1

TU Dortmund, Sommersemester 2018

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Christoph Schumacher

M. Sc. Matthias Täufer



Übung 1 (4 Punkte). Wir betrachten auf dem Graphen \mathbb{Z}^d mit dem in Vorlesung eingeführten messbaren Raum (Ω, \mathcal{A}) die terminale σ -Algebra \mathcal{A}_∞ bezüglich der Folge von Unter- σ -Algebren, $(\sigma(A_{\{e\}}))_{e \in E}$. Entscheiden Sie (mit Begründung), ob die folgenden Ereignisse in \mathcal{A}_∞ liegen:

- Es gibt keinen unendlichen Cluster.
- Es existieren genau 42 unendliche Cluster.
- Der oben gezeigte Teilgraph taucht im zufälligen Graphen (V, E_ω) unendlich oft auf.
- Der oben gezeigte Teilgraph taucht im zufälligen Graphen (V, E_ω) nie auf.

Übung 2 (4 Punkte). Erinnerung: In der Vorlesung hatten wir für $n \in \mathbb{N}$ die Größe $\sigma(n)$ definiert als die Menge der selbstvermeidenden Pfade der Länge $n \in \mathbb{N}$ im Graphen \mathbb{Z}^d , die bei 0 starten.

- Zeigen Sie: $\sigma(m+n) \leq \sigma(m) \cdot \sigma(n)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$.
- Eine Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt subadditiv, wenn für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(m+n) \leq f(m) + f(n).$$

Sei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ subadditiv. Zeigen Sie, dass $(f(n)/n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen eine Zahl in $[-\infty, +\infty)$ konvergiert.

(Möglicher Tipp (für den Fall, dass Sie nicht weiterkommen). Sei $q \in \mathbb{N}$ und $n \geq q$. Dann lässt sich $n = k \cdot q + r$ schreiben, wobei $k \in \mathbb{N}$ und $r \in \{0, \dots, q-1\}$. Beginnen Sie nun mit $f(n)/n$ und schätzen Sie dies unter Ausnutzung der Subadditivität gegen etwas ab, das den Ausdruck $f(q)/q$ enthält. Schicken Sie dann $n \rightarrow \infty$ und bemerken Sie, dass die Argumentation für alle $q \in \mathbb{N}$ gilt. Nehmen sie schließlich $\inf_{q \in \mathbb{N}}$ und folgern Sie die Aussage.)

- Folgern Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\sigma(n))}{n}$$

als positive, reelle Zahl existiert.

Abgabe am 26.04.2018 in der Vorlesung.