Perkolationstheorie

Übungsblatt 10

TU Dortmund, Sommersemester 2018

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Christoph Schumacher

M. Sc. Matthias Täufer

Erinnerung: Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega = \{0,1\}^n$. Für $S \subset \{1,\dots,n\}$ hatten wir

$$A\,|_S := \{\omega \in \Omega \colon \forall \tilde\omega \text{ mit } \tilde\omega\,|_S = \omega\,|_S \text{ gilt } \tilde\omega \in A\} \quad \text{sowie} \quad A \circ B := \bigcup_{S \subset \{1,\dots,n\}} (A\,|_S \cap B\,|_{S^c})$$

definiert (tatsächlich war $A \circ B$ zunächst etwas anders definiert worden, aber dann hatten wir in Übung 13b) obige Darstellung von $A \circ B$ gezeigt).

Übung 31 (4 Punkte)**.** *Sei A ein wachsendes und B ein fallendes Ereignis in Ω. Zeigen Sie $A \circ B = A \cap B$.*

Für die kommende Übung betrachten wir Perkolation auf $\mathbb{Z}^d$ mit dem üblichen Perkolations-Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und wollen sogenannte *Enhancments* oder *Verstärkungen* von Graphen untersuchen. Sei dazu $R \in \mathbb{N}$ und $B(R) := [-R, R]^d \cap \mathbb{Z}^d$ sowie $F \colon \Omega \to \Omega$ eine Funktion, die nur von Vertizes in $B(R)$ abhängt und die monoton ist. Das bedeutet, dass für alle $\omega \in \Omega$, ein neuer ("verstärkter") Graph $F(\omega)$ mit zusätzlichen Verbindungen in $B(R)$ definiert wird. Ebenso definieren wir für $x \in \mathbb{Z}^d$ und $\omega \in \Omega$ die Konfiguration $F(x,\omega) := \tau_x^{-1} F((\tau_x \omega)$, wobei τ_x die Verschiebung um x bezeichnet. Nun wählen wir unabhängig von ω eine weitere Folge $\eta = (\eta_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ von unabhängigen Bern(s)-Zufallsvariablen, wobei $s \in (0,1)$ ist, und definieren

$$G^{\text{enh}}(\omega, \eta) := G(\omega) \cup \left\{ \bigcup_{x \colon \eta(x) = 1} F(x, \eta) \right\},$$

wobei die Vereinigung bedeutet, dass wir die Mengen der aktiven Kanten vereinigen.

Die *verstärkte Perkolationswahrscheinlichkeit* ist nun gegeben durch

$$\Theta^{\text{enh}}(p,s) = \mathbb{P}_{p,s}\left(0 \text{ gehört zu einem unendlichen Cluster von } G^{\text{enh}}\right),$$

wobei $\mathbb{P}_{p,s}$ die gemeinsame Verteilung von ω und η bezeichnet.

Übung 32 (4 Punkte)**.** *Sei $d = 2$ und seien $s, p \in (0,1)$ gegeben. Geben Sie eine Verstärkung an, so dass so dass $0 < \Theta^{\text{enh}}(p,s) < 1$ gilt (und beweisen Sie, dass diese Ungleichungen gelten).*
Tipp: Die FKG-Ungleichung könnte hilfreich sein.

Abgabe am 30.07.2018 in der Übung.