Perkolationstheorie

Übungsblatt 11

TU Dortmund, Sommersemester 2018

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Christoph Schumacher

M. Sc. Matthias Täufer

Übung 34. *Wir betrachten Perkolation mit Perkolationsparameter $p \in (0,1]$ auf $\mathbb{Z}^d$. Bezeichne $\beta(n) := \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial B(n))$.*

a) Zeigen Sie: Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\beta(m+n) \leq 2d(3m)^{d-1}\beta(m)\beta(n).$$

b) Zeigen Sie, dass mit $g(n) := \ln(2d) + (d-1)\ln(3n)$ die Abbildung

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto \alpha(n) := \ln\beta(n) + g(n) + (d-1)\ln 2 \quad \textit{subadditiv ist.}$$

Übung 35. *In der Vorlesung wurde diskutiert, dass es eine Funktion*

$$(0,1] \ni p \mapsto \phi(p) := \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha(n)|}{n} \in (0,\infty)$$

gibt.

a) Verifizieren Sie, dass

$$\phi(p) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\ln\beta(n)|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\ln\beta(n)}{n}$$

gilt.

b) Zeigen Sie, dass ϕ stetig ist. Dabei dürfen Sie verwenden, dass

$$|n\phi(p) + \ln\beta(n)| \leq C + (d-1)\ln n$$

für ein $C > 0$ gilt.

Übung 36. *a) Zeigen Sie, dass $\phi\colon (0,1] \to [0,\infty)$ monoton fallend ist.*

Tipp: Im Kontext der reliability theory hatten wir folgendes Theorem kennengelernt: Sei A ein Ereignis, das nur von endlich vielen Kanten abhängt. Dann ist $p \mapsto \ln(\mathbb{P}_p(A))/\ln(p)$ eine monoton fallende Funktion von p. Wenden Sie dieses Theorem auf das Ereignis $\{0 \leftrightarrow \partial B(n)$ an.

b) Berechnen Sie $\phi(p_c) = 0$.

Abgabe am 01.08.2018 in der Übung.