Perkolationstheorie

Übungsblatt 12

TU Dortmund, Sommersemester 2018

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Christoph Schumacher

M. Sc. Matthias Täufer

Übung 37 (4 Punkte)**.** *Ziel dieser und der folgenden Aufgabe ist, Theorem 13.4 aus der Vorlesung zu beweisen. Dazu definieren wir*

$$\pi_n := \mathbb{P}_p(|C(0)| = n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wir hatten in Lemma 13.5 gesehen, dass für alle $m, k \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\frac{\pi_{k+m}}{k+m} \geq \frac{p}{(1-p)^2} \frac{\pi_m}{m} \frac{\pi_k}{k}$$

gilt. Diese darf im Folgenden verwendet werden.

a) *Finden Sie eine subadditive Folge $\tilde{\pi}_n$, so dass*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\tilde{\pi}_n}{n}\right|$$

existiert und mit

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\ln \pi_n}{n}\right|$$

übereinstimmt, wodurch dann insbesondere gezeigt ist, dass $\zeta(p) := \lim_{n\to\infty} |\pi_n|/n$ existiert.

b) *Zeigen Sie*

$$\pi_n \leq \frac{(1-p)^2}{p} n \exp(-n\zeta(n)).$$

Übung 38 (4 Punkte)**.** a) *Zeigen Sie:*

$$\zeta(p) = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\ln \mathbb{P}_p(n \leq |C(0)| < \infty)}{n}\right|.$$

b) *Zeigen Sie, dass für alle $p < p_c$ gilt:*

$$\zeta(p) \leq \phi(p),$$

wobei $\phi(p)$ definiert war als

$$\phi(p) = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\ln \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial B(n))}{n}\right|.$$

Abgabe am 03.08.2018 in der Übung.