Perkolationstheorie

Übungsblatt 13

TU Dortmund, Sommersemester 2018

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Christoph Schumacher

M. Sc. Matthias Täufer

Übung 40 (4 Punkte)**.** *Wir wollen zeigen, dass die Zwei-Punkt-Konnektivitätsfunktionen*

$$[0,1] \ni p \mapsto \tau_p(x,y) := \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{Z}^d$ stetig sind.

a) *Zeigen Sie, dass $p \mapsto \tau_p(x,y)$ unterhalbstetig ist.*

b) *Sei*

$$\tau_p^+(x,y,n) := \mathbb{P}_p(\textit{entweder } x \leftrightarrow y \textit{ in } B(n) \textit{ oder } x \leftrightarrow \partial B(n) \textit{ und } y \leftrightarrow \partial B(n)).$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{N} \ni n \mapsto \tau_p^+(x,y,n)$ für große n monoton fallend ist und identifizieren Sie $\lim_{n\to\infty} \tau_p^+(x,y,n)$.

c) *Folgern Sie, dass $p \mapsto \tau_p(x,y)$ oberhalbstetig ist.*

Übung 41 (4 Punkte, besonderes Schmankerl zum Schluss)**.** *Wir betrachten Perkolation auf $\mathbb{Z}^d$ im superkritischen Regime. In dieser Aufgabe beweisen wir, dass die Oberfläche des (eindeutigen) unendlichen Clusters proportional zu dessen Volumen wächst.*
In der Vorlesung wurde die Menge der inneren Kanten von I definiert als

$$I_e := \{f \in E \colon f \textit{ aktiv und beide Endpunkte gehören zu } I\}$$

sowie der Kantenrand als

$$\Delta I := \{f \in E \colon f \textit{ passiv und mindestens ein Endpunkt von } e \textit{ gehört zu } I\}.$$

a) *Zeigen Sie, dass es Konstanten c_1, c_2 gibt, so dass fast sicher*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|B(n) \cap \Delta I|}{|B(n)|} = c_1 \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|B(n) \cap I_e|}{|B(n)|} = c_2$$

gelten, wobei wir mit $B(n) \cap A$ die Menge an Kanten in $A \subset E$ bezeichnen, deren beide Endpunkte in $B(n)$ liegen. *Tipp: Definieren Sie $\beta(f) := \chi_{\{f \in \Delta I\}}$ und $\gamma(f) := \chi_{\{f \in I_e\}}$ für $f \in \mathbb{Z}^d$ und nutzen Sie Ergodizität.*

b) *Zeigen Sie*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|B(n) \cap I_e|}{|B(n) \cap \Delta I|} = \frac{1-p}{p}.$$

Tipp: Zeigen Sie unter Benutzung bedingter Erwartungen $\mathbb{E}_p(\beta(f)) = \frac{1-p}{p}\mathbb{E}_p(\gamma(f))$.

Abgabe am 06.08.2018 in der Übung.