Perkolationstheorie

Übungsblatt 2

TU Dortmund, Sommersemester 2018

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Christoph Schumacher

M. Sc. Matthias Täufer

Übung 3 (4 Punkte)**.** *Finden Sie zu den angegebenen planar eingebetteten Graphen jeweils den dualen Graphen. Eine Skizze und eine kurze Beschreibung sind ausreichend; eine formale Definition des dualen Graphen wird nicht verlangt.*

a) Der Graph, der von der Sechseckparkettierung erzeugt wird.

b) Der Graph, der von der Parkettierung in Bild (b) erzeugt wird.

c) Der Graph, der von der Parkettierung in Bild (c) erzeugt wird

d) Der Graph, der vom Kagome-Gitter erzeugt wird; siehe Parkettierung (d).

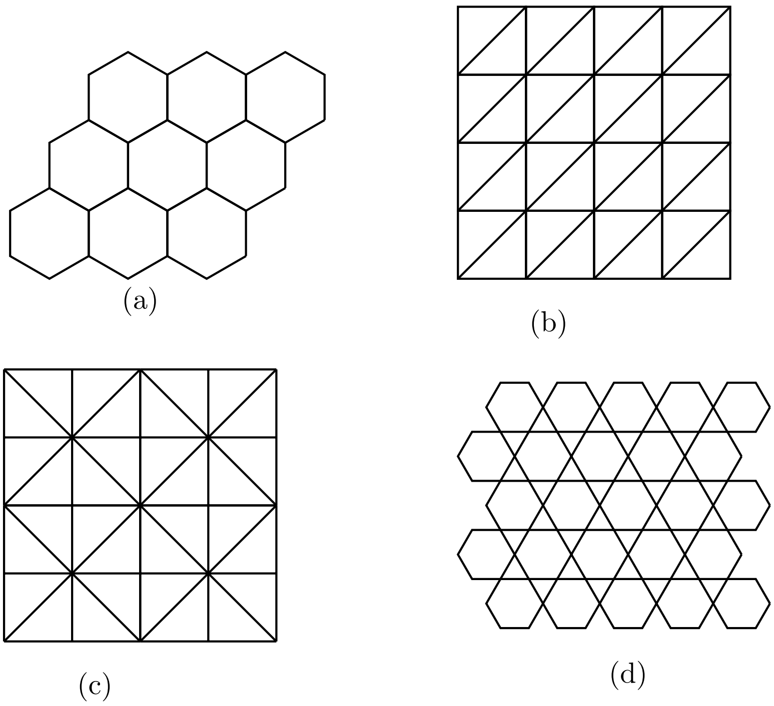

Figure 1: Planare Graphen zu Aufgabe 1 a)-d)

Übung 4 (4 Punkte)**.** *Wir betrachten Perkolation auf $\mathbb{Z}^d$. Wir hatten in Vorlesung definiert:*

$$\Theta(p) := \mathbb{P}_p(0 \textit{ liegt in unendlichem Cluster}).$$

Geben Sie einen vollständigen Beweis dafür, dass die Abbildung $[0,1] \ni p \mapsto \Theta_p$ isoton ist.

Bitte wenden!

Übung 5 (4 Punkte)**.** *Sei $\mathcal{T}_k$ der reguläre Baumgraph vom Grad k (jeder Vertex hat genau k Nachbarn). Zeigen Sie, dass die kritische Perkolationswahrscheinlichkeit p_c auf $\mathcal{T}_{n+1}$ größer oder gleich $1/n$ ist.*

Übung 6 (4 Punkte)**.** *Zeigen Sie, dass die kritische Perkolationswahrscheinlichkeit auf $\mathcal{T}_{n+1}$ kleiner oder gleich $1/n$ ist.*

Ein paar vielleicht hilfreiche Tipps:

- *Fixieren Sie einen Vertex (die "Wurzel") und nehmen Sie $p > 1/n$ an.*
- *Es genügt zu zeigen: $\mathbb{P}(\textit{Wurzel in unendlichem Cluster}) > 0$.*
- *Definieren Sie die Zufallsvariable $X_N := \#\{\textit{Vertizes mit Abstand } N \textit{ zur Wurzel, die mit dieser durch einen aktiven Pfad verbunden sind}\}$*
- *Nun genügt es, zu zeigen: $\mathbb{P}(X_N > 0) > c$ für eine N-unabhängige Konstante.*
- *Zeigen Sie dies! Dabei hilft die Ungleichung*
$$\mathbb{P}(X > 0) \geq \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}.$$
- *Viele Spaß!*

Abgabe am 11.05.2018 in der Übung oder zuvor in Raum M613.