Perkolationstheorie

Übungsblatt 3

TU Dortmund, Sommersemester 2018

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Christoph Schumacher

M. Sc. Matthias Täufer

Ziel der folgenden zwei Aufgaben ist es, Betrachtungen über *Knotenperkolation* oder *Vertexperkolation* anstellen. Dazu ist es nützlich, folgenden Begriff einzuführen: Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein Graph $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ heißt *überdeckender Graph (engl: covering graph) bezüglich* G, wenn eine Bijektion $b \colon \tilde{V} \to E$ zwischen $\tilde{V}$ und E existiert, so dass zwei Knoten $\tilde{v}_1$ und $\tilde{v}_2$ in $\tilde{V}$ genau dann durch eine Kante in $\tilde{E}$ verbunden sind, wenn die zugehörigen Kanten $b(\tilde{v}_1)$ und $b(\tilde{v}_2)$ einen gemeinsamen Endpunkt haben.

Übung 7 (4 Punkte)**.** *a) Finden Sie den überdeckenden Graphen für das $\mathbb{Z}^2$-Gitter.*

b) Finden Sie den überdeckenden Graphen für das hexagonale Gitter.

c) Finden Sie den überdeckenden Graphen für den in Teilaufgabe b) gefundenen Graphen.

Übung 8 (4 Punkte)**.** *In der Vorlesung wurde der* Kantenperkolationsprozes *auf einem Graphen $G = (V, E)$ definiert, bei dem Kanten $e \in E$ unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ aktiv sind.*

a) Definieren Sie nun einen Knotenperkolationsprozess*, bei dem Knoten $v \in V$ unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ aktiv sind. Beschreiben Sie dabei insbesondere Knoten- und Kantenmnenge des zufälligen Graphen.*

b) Sei G Graph mit endlichem Knotengrad und $\tilde{G}$ überdeckender Graph von G. Zeigen Sie, dass der Knotenperkolationsprozess auf $\tilde{G}$ äquivalent ist zu einem Kantenperkolationsprozes auf G in dem Sinne, dass die Wahrscheinlichkeit für die Existenz eines unendlichen Cluster in beiden Graphen gleich groß ist.

Übung 9 (4 Punkte)**.** *Beweisen Sie die Harris-Ungleichung aus der Vorlesung:*
Seien $f, g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ n-isoton und $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, reelwertige Zufalllsvariablen. Setze $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\mathbb{E}\left[f(X)g(X)\right] \geq \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(X)].$$

Übung 10 (4 Punkte)**.** *Wir betrachten den Perkolations-Wahrscheinlichkeitsraum. Seien $A_1, \ldots, A_n$ wachsende Ereignisse, die alle die gleiche Wahrscheinlichkeit haben und sei $p := \mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$. Zeigen Sie, dass für alli $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:*

$$P(A_i) \geq 1 - (1 - p)^{1/n}.$$

Abgabe am 25.05.2018 in der Übung.