

Perkolationstheorie

Übungsblatt 5

TU Dortmund, Sommersemester 2018

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Christoph Schumacher

M. Sc. Matthias Täufer

Erinnerung: Für $S \subset \bar{n} := \{1, \dots, n\}$ und $A, B \subset \Omega$, wobei $\Omega := \times_{j=1}^n \Omega_j$ für endliche Ω_j , hatten wir

$$A|_S := \{\omega \in \Omega : \forall \tilde{\omega} \text{ mit } \tilde{\omega}|_S = \omega|_S \text{ gilt } \tilde{\omega} \in A\}$$

und

$$A \circ B := \{\omega \in \Omega : \exists S, T \subset \bar{n} \text{ disjunkt mit } \omega \in A|_S \cap B|_T\}$$

definiert.

Übung 13 (4 Punkte). Seien $A, B \subset \Omega$.

(a) Beschreiben Sie $A|_{\bar{n}}$ und $A|_{\emptyset}$.

(b) Sei $S \subset \bar{n}$. Gilt $A|_S \subset A$, $A \subset A|_S$ oder keines von beiden?

(c) Seien $T_1 \subset T_2 \subset \bar{n}$. Zeigen Sie $B|_{T_1} \subset B|_{T_2}$.

(d) Zeigen Sie

$$A \circ B = \bigcup_{S \subset \bar{n}} (A|_S \cap B|_{S^c}).$$

Übung 14 (4 Punkte). Seien $A, B, C \subset \Omega$ und $S, T \subset \bar{n}$. Zeigen Sie:

(a) $(A \cup B)|_S = A|_S \cup B|_S$ und $(A \cap B)|_S = A|_S \cap B|_S$.

(b) $(A|_S)|_T = A|_{S \cap T}$.

(c) $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$.

Übung 15 (4 Punkte). Sei nun $\Omega_j = \{0, 1\}$, also $\Omega = \{0, 1\}^n$. Seien A und B wachsende Ereignisse. Zeigen Sie, dass dann auch $A \circ B$ wachsend ist.

Übung 16 (4 Punkte). Wir betrachten nun Perkolation mit Parameter $p \in [0, 1]$ auf dem vollständigen Graphen von Grad n (n Vertices; alle Paare von Vertices sind unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit p durch eine Kante verbunden).

a) Sei $n = 3$. Wir bezeichnen die Vertices mit $\{x, y, z\}$ und definieren die Ereignisse

$$A := \{\exists \text{ aktiver Pfad von } x \text{ nach } y\}, \quad B := \{\exists \text{ aktiver Pfad von } y \text{ nach } z\}.$$

Berechnen Sie $\mathbb{P}_p(A)$, $\mathbb{P}_p(B)$ und $\mathbb{P}_p(A \circ B)$ und prüfen Sie, ob $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A \circ B)$ gilt.

b) Sei $n = 4$ und $p = 1/2$. Wir bezeichnen die Vertices mit $\{w, x, y, z\}$ und definieren die Ereignisse

$$C := \{\exists \text{ aktiver Pfad von } x \text{ nach } y\}, \quad D := \{\exists \text{ aktiver Pfad von } z \text{ nach } w\}.$$

Berechnen Sie $\mathbb{P}_p(C)$, $\mathbb{P}_p(D)$ und $\mathbb{P}_p(C \circ D)$ und prüfen Sie, ob $\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D) \geq \mathbb{P}(C \circ D)$ gilt.

Abgabe am 15.06.2018 in der Übung.