Perkolationstheorie

Übungsblatt 6

TU Dortmund, Sommersemester 2018

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Christoph Schumacher

M. Sc. Matthias Täufer

Übung 17. *In der Vorlesung wurde $\chi(p) := \mathbb{E}_p(|C(0)|)$ eingeführt, wobei $C(0)$ den Cluster bezeichnet, der den Punkt 0 enthält. Berechnen Sie $\chi(p)$ für alle $p \in [0,1]$ im Fall von Kantenperkolation auf $\mathbb{Z}$.*

Übung 18. *Für Kantenperkolation auf $\mathbb{Z}^d$ mit Parameter $p \in [0,1]$ definieren wir*

$$\tau_{0,n}(p) := \mathbb{P}_p\left((n, 0, \ldots, 0) \in C(0)\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Abbildung $p \mapsto \tau_{0n}(p)$ wird auch Konnektivitätsfunktion *der Punkte 0 und $(n, 0, \ldots, 0)$ genannt. Zeigen Sie, dass für alle $p \in [0,1]$ der Ausdruck $m(p)$, definiert durch*

$$-m(p) := \lim_{n \to \infty} \frac{\ln(\tau_{0n}(p))}{n}$$

als nicht-negative Zahl existiert.

Übung 19. *Wir betrachten nun Perkolation auf $\mathcal{T}_{k+1}$, dem regulären Baumgraphen vom Grad $k+1$, wobei $k \in \mathbb{N}$ (d.h. jeder Vertex hat genau $k+1$ Nachbarn). Wir hatten in Übungen 5) und 6) gesehen, dass die kritische Perkolationswahrscheinlichkeit p_c auf $\mathcal{T}_{k+1}$ genau gleich $1/k$ ist.*
In der Vorlesung wurde $\pi_c := \sup\{p \in [0,1] \colon \chi(p) < \infty\}$ definiert.

Berechnen Sie $\chi(p_c)$.

(Tipp: Sehen Sie sich die Lösung von Übung 6 auf Blatt 2 an. Zudem könnte die Formel $\mathbb{E}(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X \geq n)$ für $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariablen X hilfreich sein.)

Übung 20. *a) Im Beweis von Satz 6.1 war*

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-2^k}}{16}\right) > 0 \tag{1}$$

verwendet worden. Beweisen Sie dies.

b) Im Beweis von Satz 6.3 (im Kontext von Kantenperkolation auf $\mathbb{Z}^d$ mit $d \geq 2$) war verwendet worden, dass $\Theta(p) = \lim_{L \to \infty} P_L(p)$ gilt, wobei

$$P_L(p) := \mathbb{P}_p(0 \textit{ ist durch aktiven Pfad mit } \partial\Lambda_L \textit{ verbunden}).$$

Wir hatten gesehen:

- *$\mathbb{N} \ni L \mapsto P_L(p)$ ist antiton für jedes $p \in [0,1]$,*
- *$[0,1] \ni p \mapsto P_L(p)$ ist ein isotones Polynom für jedes $L \in \mathbb{N}$.*

Folgern Sie daraus, dass die Abbildung $p \mapsto \Theta(p)$ rechtsstetig ist.

Abgabe am 29.06.2018 in der Übung.