Perkolationstheorie

Übungsblatt 7

TU Dortmund, Sommersemester 2018

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Christoph Schumacher

M. Sc. Matthias Täufer

Erinnerung: Wir hatten für $L \in \mathbb{N}$ die Wahrscheinlichkeit $\tau_{0L}(p) := \mathbb{P}_p((L, 0, \dots, 0) \in C(0))$ und $m(p) := -\lim_{L\to\infty} \frac{\ln(\tau_{0,L}(p))}{L}$ sowie $L_0 := \min\{L \in \mathbb{N} \colon R^{\mathrm{dual}}_{L,2} \geq 1 - \frac{1}{16\mathrm{e}}$ im dualen Perkolationsprozess$\}$ definiert, wobei $R^{\mathrm{dual}}_{L,2}$ definiert ist als

$$R^{\mathrm{dual}}_{L,2} := \mathbb{P}_p(\text{Es gibt eine aktive rechts-links-Verbindung in } (-L, L) \times (-L/2, L/2) \text{ im dualen Gitter}).$$

Ziel der folgenden zwei Aufgaben ist, zu zeigen, dass $m(p)$ und $L_0^{-1}(p)$ bis auf Logarithmen übereinstimmen.

Übung 21. *a) Zeigen Sie, dass für $L \geq L_0$ die Ungleichung $\tau_{0L}(p) \leq 1 - (R^{\mathrm{dual}}_{L,2}(p))^4$ gilt.*

b) Nehmen Sie an, dass $L = 2^k L_0$ für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt und zeigen Sie $\tau_{0L}(p) \leq \mathrm{e}^{-L/L_0}$. Tipp: Reskalierungslemma!

c) Folgern Sie, dass $m(p) \geq 1/L_0$ gilt.

Übung 22. *a) Bezeichnen U und V die langen Seiten des Rechtecks $(-L/2, L/2) \times (-L, L)$. Zeigen Sie:*

$$1 - R^{\mathrm{dual}}_{L-1,2} \leq \sum_{a\in U, b\in V} \mathbb{P}(\textit{Es existiert ein aktiver Pfad von } a \textit{ nach } b \textit{ in } \Lambda_L).$$

b) Zeigen Sie, dass für alle $a \in U$ und $b \in V$ gilt:

$$\mathbb{P}(\textit{Es existiert ein aktiver Pfad von } a \textit{ nach } b) \leq \exp(-m(p)(L_0 - 1)).$$

c) Folgern Sie, dass es positive Konstanten c_1, c_2 gibt, so dass

$$m(p) \leq \frac{c_1 \ln(L_0) + c_2}{L_0} \quad \textit{gilt.}$$

Übung 23. *Wir betrachten den in der Vorlesung eingeführten Perkolationswahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_p)$ für Perkolation auf $\mathbb{Z}^d$ mit Parameter $p \in [0, 1]$. Wir hatten die maßerhaltenden Transformationen $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ kennengelernt, wobei $\tau_k(\omega)$ definiert ist durch $(\tau_k(\omega))_j := \omega_{j-k}$. (d.h. τ_k ist eine Verschiebung um k).*

Unser Ziel ist zu zeigen, dass die Familie $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ ergodisch *ist, d.h. jedes Ereignis, welches unter dieser Familie invariant ist, hat Wahrscheinlichkeit* 0 *oder* 1.

a) Angenommen, es gelte für alle Ereignisse $A, B \in \mathcal{A}$, dass

$$\lim_{|k|\to\infty} \mathbb{P}(A \cap \tau_k B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

(diese Eigenschaft der Familie $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ wird auch als mischend *("mixing") bezeichnet). Zeigen Sie, dass $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ dann ergodisch ist.*

b) Zeigen Sie, dass $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ ergodisch ist.
(Tipp: Beginnen Sie mit Ereignissen, die nur von endlich vielen Kanten abhängen und verwenden Sie dann den Approximationssatz für Maße.)

Übung 24. *Betrachten Sie Perkolation mit Parameter auf dem regulären Baumgraphen $\mathcal{T}_{k+1}$. Zeigen Sie, dass $\pi_c = p_c = 1/k$ gilt.*

Abgabe am 13.07.2018 in der Übung.