Perkolationstheorie

Übungsblatt 8

TU Dortmund, Sommersemester 2018

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Christoph Schumacher

M. Sc. Matthias Täufer

Übung 25 (4 Punkte)**.** *Wir betrachten Perkolation auf $\mathbb{Z}^d$ mit dem in der Vorlesung eingeführten Perkolations-Wahrscheinlichkeitsräumen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_p)$, $p \in [0,1]$. Sei X eine (fast sicher endliche Zufallsvariable), die nur von einer endlichen Kantenmenge E abhängt (insbesondere ist damit $X \in \mathcal{L}^1$). Zeigen Sie*

$$\frac{\partial}{\partial_p}\mathbb{E}_p(X) = \sum_e \mathbb{E}_p[\delta_e X], \quad \textit{wobei} \quad \delta_e X = X\mid_{\omega_e=1} - X\mid_{\omega_e=0} .$$

Tipp: Gehen Sie wie im Beweis der Russo-Ungleichung vor: Definieren Sie den Wahrscheinlichkeitsraum für uniform verteilte $[0,1]$-Folgen. Definieren Sie dann für $[0,1]$-Folgen ξ, $\mathbf{p}$ eine $\{0,1\}$-Folge $\eta_{\mathbf{p}}(\xi)$, so dass für uniform verteilte $[0,1]$-Folgen ξ gilt: $\eta_{\mathbf{p}}(\xi) \sim \mathbb{P}_{\mathbf{p}}$, wobei $\mathbb{P}_{\mathbf{p}} := \times_{e\in E} \operatorname{Ber}(\mathbf{p}(\mathbf{e}))$. Nun wählen Sie $\mathbf{p}$ und $\mathbf{p}'$, die sich nur auf einer Koordinate $f \in E$ unterscheiden und zeigen Sie, dass $\mathbb{E}_{\mathbf{p}'}(X) - \mathbb{E}_{\mathbf{p}}(X) = (\mathbf{p}'(f) - \mathbf{p}(f))\mathbb{E}_{\mathbf{p}}[\delta_f X]$ gilt. Wählen Sie $\mathbf{p}$ als konstante Folge und schließen Sie die Aussage.

Übung 26 (4 Punkte)**.** *Ziel dieser Aufgabe ist es, sich mit Aspekten des Ergodensatzes vertraut zu machen. Sei $(X_z)_{z\in\mathbb{Z}^d}$ eine stationäre Familie von (uniform) beschränkten Zufallsvariablen und bezeichne $B(n) := [-n,n]^d \cap \mathbb{Z}^d$.*

a) *Zeigen Sie: falls*

$$\overline{X} := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{B(n)} \sum_{z\in B(n)} X_z$$

existiert, so ist es fast sicher invariant unter den Verschiebungen $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$, definiert durch $(\tau_x\omega)(k) := \omega(k-x)$, $k, x \in \mathbb{Z}^d$.

Bemerkung: Der Beweis der Existenz von $\overline{X}$ ist der schwierigere Teil im Beweis des Ergodensatzes.

b) *Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable $\overline{X}$ fast sicher konstant ist.*

Übung 27 (Bonus zu lattice animals)**.** *In der Vorlesung hatten wir lattice animals oder Gittertierchen definiert als Cluster, die die 0 enthalten. Zudem hatten wir für ein Gittertierchen A die Mengen A_v (die an A beteiligten Vertices), A_e (die an A beteiligten Kanten) und ΔA als den Kantenrand von A definiert.*

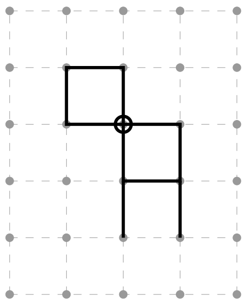
Auf Seite 2 finden Sie mehrere Beispiele von Lattice animals bzw. Gittertierchen. Der Nullpunkt ist jeweils durch einen kleinen Kreis gekennzeichnet.

a) *Geben Sie jeweils $\|A_v\|$, $\|A_e\|$ und $\|\Delta A\|$ sowie die Wahrscheinlichkeit (bei Perkolationaparameter $p \in [0,1]$) dafür an, dass der Nullcluster dem jeweils abgebildeten Gittertierchen entspricht.*

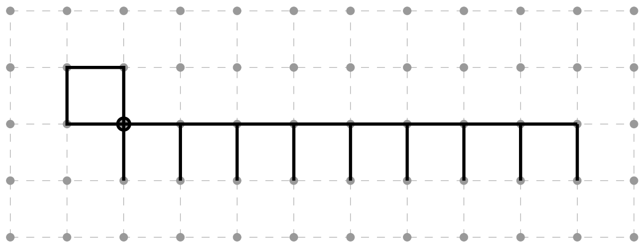
b) *Es gibt bei diesen vier Gittertierchen eine eindeutige Reihenfolge der Wahrscheinlichkeiten ihres Auftretens, die für alle $p \in [0,1]$ gilt. Finden Sie diese Reihenfolge.*

c) *Geben Sie zwei Gittertierchen an, die bei unterschiedlichen Werten von p eine verschiedene Reihenfolge der Auftrittswahrscheinlichkeiten haben.*

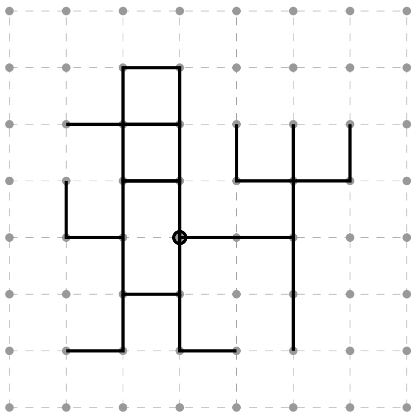
Abgabe am 25.07.2018 in der Übung.



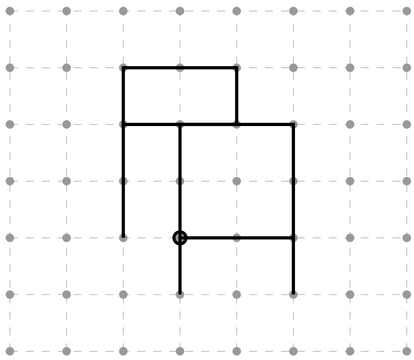
(Gallus gallus domesticus)



(Ommatoiulus sabulosus)



(Homo sapiens, agricola)



(Elephas maximus)

Abbildung 1: Gittertierchen zu Übung 27