Perkolationstheorie

Übungsblatt 9

TU Dortmund, Sommersemester 2018

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Christoph Schumacher

M. Sc. Matthias Täufer

Übung 28 (4 Punkte)**.** *Für $\gamma \in (0,1)$ und $p \in (0,1)$ sei*

$$\Theta(p,\gamma) := 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (1-\gamma)^n \mathbb{P}_p(|C(0)| = n).$$

Zeigen Sie, dass für jedes $\gamma \in (0,1)$ die Funktion $\Theta(p,\gamma)\colon (0,1) \to [0,1]$ stetig differenzierbar in p ist.

Übung 29 (4 Punkte)**.** *Wir definieren nun analog zur vorherigen Aufgabe*

$$\Theta_N(p,\gamma) := 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (1-\gamma)^n \mathbb{P}_p(|C_N(0)| = n),$$

wobei $C_N(0)$ den Nullcluster bei Perkolation auf dem endlichen Teilgraphen in $B(N) = [-N,N]^d \cap \mathbb{Z}^d$ bezeichnet.

Anmerkung: Tatsächlich wird in der Vorlesung $C_N(0)$ nicht als der Nullcluster bei Perkolation auf $B(n)$ definiert werden, sondern als Nullcluster bei Perkolation auf einer so genannten Periodisierung *von $B(n)$, bei welcher gegenüberliegende Ränder von $B(n)$ identifizert werden. Da dieser Unterschied für diesen Beweis keine Rolle spielt, wollen wir diesen Umstand in dieser Aufgabe geflissentlich ignorieren.*

Zeigen Sie, dass für $\gamma \in (0,1)$ und $p \in (0,1)$ gilt

$$\lim_{N\to\infty} \Theta_N(p,\gamma) = \Theta(p,\gamma),$$
$$\lim_{N\to\infty} \frac{\partial \Theta_N(p,\gamma)}{\partial p} = \frac{\partial \Theta(p,\gamma)}{\partial p},$$
$$\lim_{N\to\infty} \frac{\partial \Theta_N(p,\gamma)}{\partial \gamma} = \frac{\partial \Theta(p,\gamma)}{\partial \gamma}.$$

Übung 30 (Bonusaufgabe)**.** *Betrachten Sie Kantenperkolation mit Perkolationsparameter $p \in (0,1)$. Sei A ein wachsendes Ereignis und e eine Kante. Zeigen Sie:*

$$\mathbb{P}_p(A \mid e \textit{ aktiv}) \geq \mathbb{P}_p(A) \geq \mathbb{P}_p(A \mid e \textit{ passiv}).$$

Abgabe am 25.07.2018 in der Übung.