Brownsche Bewegung, SoSe 2019 | Prof. Dr. I. Veselić
Dr. C. Schumacher

**Hausaufgabe 1**
**Abgabe am 9. 4. 2019**

---

## 1. Radon-Nikodym $\sigma$-endlich:

zur Lösung

Erweiterung des Satzes von Radon-Nikodym auf $\sigma$-endliche Maße: Es seien $\mu, \nu$ zwei $\sigma$-endliche Maße auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\nu \ll \mu$. Zeigen Sie, dass $\nu$ dann eine Dichte bezüglich $\mu$ hat.

**Kommentar zu Radon-Nikodym $\sigma$-endlich:** In [**Bauer**] wird $\nu$ nicht als $\sigma$-endlich vorausgesetzt. Im Fall 2 des Beweises wird der Wahrscheinlichkeitsraum in einen krassen Teil zerlegt, auf dem die Dichte $\infty$ ist, und einen Teil, auf dem $\nu$ $\sigma$-endlich ist, zerlegt.

**Lösung zu Radon-Nikodym $\sigma$-endlich:**

Es gibt eine Ausschöpfung von $\Omega$ mit paarweise disjunkten Mengen $K_n \in \mathcal{A}$, $\mu(K_n) < \infty$, $\nu(K_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \Omega$. (Eigentlich bekommt man eine Folge für $\mu$ und eine weitere Folge für $\nu$, aber wenn man die Glieder beider Folgen miteinander schneidet und die leeren Schnitte aussortiert, erhält man $K_n$.) Die Maße $\mu_n := \mathbb{1}_{K_n}\mu$ und $\nu_n := \mathbb{1}_{K_n}\nu$ sind endlich und erfüllen $\nu_n \ll \mu_n$, $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von Radon-Nikodym aus der Vorlesung gibt also Dichten $h_n \in L^1(\mu_n)$ mit $\nu_n = h_n\mu_n$. Wir setzen nun $h := \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n \mathbb{1}_{K_n}$. Dann gilt für $A \in \mathcal{A}$ mit monotoner Konvergenz

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \int \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A\cap K_n}\,\mathrm{d}\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A h_n\,\mathrm{d}\mu_n \\ &= \lim_{N\to\infty} \int_A \sum_{n=1}^{N} h_n \mathbb{1}_{K_n}\,\mathrm{d}\mu = \int_A \sum_{n=1}^{\infty} h_n \mathbb{1}_{K_n}\,\mathrm{d}\mu = \int_A h\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Also ist $h$ eine Dichte von $\nu$ bezüglich $\mu$.

## 2. Bedingung mit Maß Null:

zur Lösung

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ und $Y\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ Zufallsvariablen und $y_0 \in \mathbb{R}^k$. Weiter sei $X$ integrierbar und $g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ eine faktorisierte Version der bedingten Erwartung $\mathbb{E}[X \mid Y]$, sprich, es gelte $\mathbb{E}[X \mid Y = y] = g(y)$ für $\mathbb{P}_Y$-fast alle $y \in \mathbb{R}^k$. Wir nehmen an, dass das Ereignis $B_\varepsilon := \{|Y - y_0| \leqslant \varepsilon\}$ für alle $\varepsilon > 0$ positive Wahrscheinlichkeit hat und dass $g$ in $y_0$ stetig ist. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}[X \mid |Y - y_0| \leqslant \varepsilon] \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} g(y_0),$$

wobei für Ereignisse $B \in \mathcal{A}$ mit positiver Wahrscheinlichkeit $\mathbb{E}[X \mid B] := \mathbb{E}[X \mathbb{1}_B]/\mathbb{P}(B)$ sei.

**Kommentar zu Bedingung mit Maß Null:** Man sollte noch $X \in \mathcal{L}^1$ voraussetzen!

Das Ergebnis der Aufgabe ist lax formuliert

$$\mathbb{E}[X \mid |Y - y_0| \leqslant \varepsilon] \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} g(y_0)\mathbb{E}[X \mid Y = 0].$$

Die Stetigkeit von $g$ in $y_0$ erlaubt uns, die $L^1$-Funktion $\mathbb{E}[X \mid Y = \cdot\,]$ in $y_0$ auszuwerten.

**Lösung zu Bedingung mit Maß Null:**

Wegen $B_\varepsilon \in \sigma(Y)$ gilt

$$\mathbb{E}[X \mid |Y - y_0| \leqslant \varepsilon] = \frac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{B_\varepsilon}]}{\mathbb{P}(B_\varepsilon)} = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y]\mathbb{1}_{B_\varepsilon}]}{\mathbb{P}(B_\varepsilon)} = \frac{1}{\mathbb{P}(B_\varepsilon)} \int_{|y-y_0| \leqslant \varepsilon} g(y)\mathbb{P}_Y(\mathrm{d}y).$$

Da $g$ stetig in $y_0$ ist, finden wir für alle $\kappa > 0$ ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $y \in \mathbb{R}^k$ mit $|y - y_0| < \varepsilon$ auch $|g(y) - g(y_0)| \leqslant \kappa$ gilt. Also können wir schließen, dass

$$\limsup_{\varepsilon \searrow 0} |\mathbb{E}[X \mid |Y - y_0| \leqslant \varepsilon] - g(y_0)| \leqslant \limsup_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\mathbb{P}(B_\varepsilon)} \int_{|y-y_0| \leqslant \varepsilon} |g(y) - g(y_0)|\mathbb{P}_Y(\mathrm{d}y) \leqslant \kappa$$

für alle $\kappa > 0$ gilt, und das impliziert die Behauptung.

## 3. Bayes'sche Formel: zur Lösung

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ eine Teil-$\sigma$-Algebra, $A \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(A) > 0$ und $B \in \mathcal{F}$. Beweisen Sie, dass

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\int_B \mathbb{P}(A \mid \mathcal{F}) \, \mathrm{d}\mathbb{P}}{\int \mathbb{P}(A \mid \mathcal{F}) \, \mathrm{d}\mathbb{P}}.$$

Spezialisieren Sie die Formel für den Fall, dass $\mathcal{F} = \sigma(B_j; j \in \mathbb{N})$ von paarweise disjunkten Mengen $B_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$, erzeugt wird, und $B = B_1$.

**Kommentar zu Bayes'sche Formel:** []

**Lösung zu Bayes'sche Formel:**

Mit $B \in \mathcal{F}$ und der Turmeigenschaft folgt

$$\int_B \mathbb{P}(A \mid \mathcal{F}) \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}]] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A \cap B}] = \mathbb{P}(A \cap B).$$

Für $B = \Omega$ sehen wir, dass die rechte Seite zu $\mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(A)$ wird.

Setzen wir nun $B = B_1$ ein. Dann ist $\int_B \mathbb{P}(A \mid \mathcal{F}) \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)$ und $\int \mathbb{P}(A \mid \mathcal{F}) \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \sum_j \mathbb{P}(A \mid B_j)\mathbb{P}(B_j)$, also entsteht die klassische Formel von Bayes:

$$\mathbb{P}(B_1 \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_1)\mathbb{P}(B_1)}{\sum_j \mathbb{P}(A \mid B_j)\mathbb{P}(B_j)}.$$

## 4. Erzeuger der Produkt-$\sigma$-Algebra: zur Lösung

Es sei $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge und $(E, \mathcal{B})$ ein Messraum. Für $i \in I$ und alle endlichen Teilmengen $J \sqsubset I$ seien $\pi_i \colon E^I \to E$, $\pi_J \colon E^I \to E^J$ und $\pi_i^J \colon E^J \to E$ die Projektionen oder Koordinatenabbildungen

$$\pi_i((e_j)_{j\in I}) := e_i, \quad \pi_J((e_j)_{j\in I}) := (e_j)_{j\in J}, \quad \pi_i^J((e_j)_{j\in J}) := e_i.$$

Wir definieren $\mathcal{F} := \sigma(\pi_i, i \in I)$ und $\widetilde{\mathcal{F}} := \sigma(\pi_J, J \sqsubset I)$, wobei die $\sigma$-Algebra auf $E^J$ gegeben sein soll durch $\mathcal{B}^{\otimes J} := \sigma(\pi_i^J, i \in J)$.

(a) Beschreiben Sie für $J \sqsubset I$ die Zylindermengen in $\mathcal{B}^{\otimes J}$, die diese $\sigma$-Algebra erzeugen.
(b) Zeigen Sie $\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}}$.
(c) Was ist die Nach- und Vorteile der Definition von $\widetilde{\mathcal{F}}$ gegenüber $\mathcal{F}$? Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen endlich-dimensionalen Marginalverteilungen und Schnittstabilität her.

**Kommentar zu Erzeuger der Produkt-$\sigma$-Algebra:** Der übliche Name ist $\mathcal{B}^{\otimes I} := \mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}}$.

**Lösung zu Erzeuger der Produkt-$\sigma$-Algebra:**

(a) Sei $J \sqsubset I$. Die $\sigma$-Algebra $\mathcal{B}^{\otimes J}$ wird erzeugt von den Mengen

$$(\pi_i^J)^{-1}(B) = B \times \bigtimes_{J\setminus\{i\}} E = E \times \cdots \times E \times B \times E \times \cdots \times E$$

mit $i \in J$ und $B \in \mathcal{B}$.

(b) Wir zeigen eine Mengengleichheit.

- $\mathcal{F} \subseteq \widetilde{\mathcal{F}}$: Es gilt $\pi_i = \pi_i^{\{i\}} \circ \pi_{\{i\}}$ und $\{i\} \sqsubset I$. Da $\pi_{\{i\}}$ $\widetilde{\mathcal{F}}$-$\mathcal{B}^{\{i\}}$-messbar und $\pi_i^{\{i\}}$ $\mathcal{B}^{\{i\}}$-$\mathcal{B}$-messbar ist, ist $\pi_i$ $\widetilde{\mathcal{F}}$-$\mathcal{B}$-messbar. Das zeigt $\mathcal{F} \subseteq \widetilde{\mathcal{F}}$.
- $\widetilde{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}$: Es genügt, die $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}^{\otimes J}$-Messbarkeit von $\pi_J$ für alle $J \sqsubset I$ zu zeigen. Die müssen wir nur auf einem Erzeuger von $\mathcal{B}^{\otimes J}$ überprüfen, also auf Mengen der Form $(\pi_i^J)^{-1}(B)$. Sei also $J \sqsubset I$, $i \in J$ und $B \in \mathcal{B}$. Dann ist

$$\pi_J^{-1}\big((\pi_i^J)^{-1}(B)\big) = (\pi_i^J \circ \pi_J)^{-1}(B) = \pi_i^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

  Also ist $\pi_J$ $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}^{\otimes J}$-messbar und $\widetilde{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}$.

(c) Nachteil: Es sind mehr Erzeuger zu berücksichtigen. Für Messbarkeitsfragen reichen die Mengen $\pi_i^{-1}(B)$, $B \in \mathcal{B}$, aus.

Vorteil: $\widetilde{\mathcal{F}}$ wird schnittstabil erzeugt, denn für $J, J' \sqsubset I$ und $B \in \mathcal{B}^J$, $B \in \mathcal{B}^{J'}$ ist $J \cup J' \sqsubset I$ und

$$\pi_J^{-1}(B) \cap \pi_{J'}^{-1}(B') = \pi_{J\cup J'}^{-1}\big((\pi_J^{J\cup J'})^{-1}(B) \cap (\pi_{J'}^{J\cup J'})^{-1}(B')\big).$$

Das impliziert, dass Wahrscheinlichkeitsmaße, die auf $\pi_J^{-1}(B)$, $B \in \mathcal{B}^J$, $J \sqsubset I$, übereinstimmen, gleich sind.