Brownsche Bewegung, SoSe 2019 | Prof. Dr. I. Veselić
Dr. C. Schumacher

Hausaufgabe 2
Abgabe am 16. 4. 2019

Aufgabe 1.

(a) Finden Sie (einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und) zwei *abhängige* Zufallsvariablen $X, Y: \Omega \to \mathbb{R}$ mit ($X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ und)

$$\mathbb{E}[X \mid Y] = \mathbb{E}[X]. \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie, dass alle Zufallsvariablen $X, Y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$, die (1) erfüllen, unkorreliert sind, also

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

(c) Finden Sie zwei unkorrelierte Zufallsvariablen $X', Y' \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$, die (1) nicht erfüllen.

Aufgabe 2. Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit zwei unabhängigen Zufallsvariablen $X: (\Omega, \mathcal{A}) \to (S, \mathcal{S})$, $Y: (\Omega, \mathcal{A}) \to (T, \mathcal{T})$ und zwei σ-Algebren $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$.

(a) Sei zusätzlich $f: S \times T \to \mathbb{R}$ derart, dass $f(X, Y) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie für $\mathbb{P}_Y$-fast alle $y \in T$, dass

$$\mathbb{E}[f(X, Y) \mid Y = y] = \mathbb{E}[f(X, y)].$$

(b) Sei nun $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{G}$ unabängig von $\sigma(\mathcal{F} \cup \sigma(X))$. Beweisen Sie

$$\mathbb{E}[X \mid \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}].$$

Tipp: Benutzen Sie das Prinzip der guten Mengen und studieren Sie

$$\mathcal{L} := \{A \in \mathcal{A} \mid \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A]\}.$$

Aufgabe 3. Ein Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ heißt *Borel-Raum*, wenn es eine Topologie τ auf Ω gibt, so dass (Ω, τ) ein polnischer Raum (also separabel und vollständig metrisierbar) ist und $\mathcal{A} = \sigma(\tau)$ die zugehörige Borel-σ-Algebra ist.

Wir betrachten das halboffene Intervall $\Omega := (0, 1]$ mit der üblichen σ-Algebra $\mathcal{A} := \mathcal{B}(\Omega)$, die von der (Topologie zur) Metrik $d_0(x, y) = |x - y|$ erzeugt wird. Weiter seien die Metriken

$$d_1(x, y) := \left| \int_x^y \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t \right| = |\log(y) - \log(x)| \quad \text{und} \quad d_2(x, y) := \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\}.$$

gegeben, welche die Topologien τ_1 und τ_2 auf Ω erzeugen.
Zeigen Sie: (Ω, τ_1) und (Ω, τ_2) …

(a) … sind polnische Räume.
(b) … sind nicht homöomorph.
(c) … haben beide als Borel-σ-Algebra die σ-Algebra $\mathcal{A}$.

Aufgabe 4. In der Statistik möchte man Modellparameter mit Hilfe von Messungen schätzen. In der Bayesschen Statistik sind Parameter selbst Zufallsgrößen und man schätzt deren Verteilung auf der Basis einer a-priori-Verteilung, die das Wissen über den Parameter vor der Messung beschreibt, und dem Messergebnis, das auch Stichprobe genannt wird. Wir brauchen also zwei Messräume: den Parameterraum $(\Theta, \mathcal{F})$ und den Stichprobenraum $(S, \mathcal{S})$. Wie angekündigt sind Parameter und Stichprobe Zufallsgrößen: $\vartheta\colon \Omega \to \Theta$ und $X : \Omega \to S$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Die a-priori-Verteilung des Parameters ϑ sei $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, \infty]$, das heißt, für alle $B \in \mathcal{F}$ gelte

$$\mathbb{P}(\vartheta \in B) = \mu(B).$$

Zu jedem Parameter $t \in \Theta$ gibt es eine Verteilung $\mathbb{P}_t\colon \mathcal{S} \to [0, 1]$ der Zufallsgröße X. Genauer seien die Verteilungen $\mathbb{P}_t$ dominiert von einem Referenzmaß $\nu\colon \mathcal{S} \to [0, \infty]$, das heißt $\mathbb{P}_t \ll \nu$, also gibt es für jedes $t \in \Theta$ eine Dichte $f_t := \frac{\mathrm{d}\,\mathbb{P}_t}{\mathrm{d}\nu}$. Die a-priori-Verteilung von X ist dann

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_\Theta \int_A f_t(x)\nu(\mathrm{d}x)\mu(\mathrm{d}t).$$

Gesucht ist nun die a-posteriori-Verteilung von ϑ nach der Messung $X = x$ mit $x \in S$, sprich $\mathbb{P}(\vartheta \in B \mid X = x)$ für $B \in \mathcal{F}$.

Lassen Sie sich vom Beispiel aus der Vorlesung über bedingte Dichten bei zwei Zufallsvariablen mit gegebener gemeinsamer Dichte inspirieren.

Beispiel: Eine AutofahrerInnenversicherung hat einen Kundenpool Ω. Zu jedem Kunden kann man die Anzahl der Unfälle $X : \Omega \to S := \mathbb{N}_0$ in den vergangenen zehn Jahren abfragen. Die Anzahl der Unfälle kann man als poissonverteilte Zufallsvariable modellieren:

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathrm{e}^{-t}x^t/x!$$

für $x \in \mathbb{N}_0$, wobei die Unfallrate $t > 0$ nicht bekannt ist. Zur Bestimmung der a-priori-Verteilung der Unfallrate $\vartheta\colon \Omega \to \Theta := (0, \infty)$ könnte man bundesweite Statistiken heranziehen.