Brownsche Bewegung, SoSe 2019 — Prof. Dr. I. Veselić, Dr. C. Schumacher

Hausaufgabe 3
Abgabe am 30. 04. 2019

Aufgabe 1. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, Ereignisse mit $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty$. Zeigen Sie, dass es eine Zufallsvariable $n^* \colon \Omega \to \mathbb{N}_0$ gibt, so dass fast sicher keines der Ereignisse A_n mit $n \geqslant n^*$ eintritt.

Anmerkung: Hiermit ist die Funktion $h = 2^{-n^*}$ aus dem Satz von Kolmogorov-Chentsov messbar.

Aufgabe 2.

(a) In der Vorlesung wurde das äußere Maß zum Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert als $\mu^*(A) := \inf\{\mu(B) \mid B \in \mathcal{A}, A \subseteq B\}$. Die übliche Definition für das äußere Maß ist

$$\nu(A) := \inf\Big\{\sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \mid A_n \in \mathcal{A}, A \subseteq \bigcup\nolimits_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big\}$$

Zeigen Sie $\mu^* = \nu$ und erklären Sie, warum man oft mit der komplizierteren Version arbeitet.

(b) Beweisen Sie, dass für eine Menge $C \subseteq \Omega$ mit äußerem Maß $\mu^*(C) = 1$ und alle $A \in \mathcal{A}$ gilt, dass $\mu^*(C \cap A) = \mu(A)$.

(c) Vervollständigen Sie den Beweis des Satzes von Doob aus der Vorlesung.

Aufgabe 3.

(a) Wir betrachten einen Messraum $(E, \mathcal{B})$ und eine nicht leere Indexmenge I. Eine Menge $B \subseteq E^I$ heißt *abzählbar determiniert*, wenn es eine abzählbare Menge $S \subseteq I$ gibt so dass für alle $x \in B$ und $y \in E^I$ mit $x(t) = y(t)$ für alle $t \in S$ folgt, dass $y \in B$. Zeigen Sie, dass alle Mengen in der Produkt-σ-Algebra abzählbar determiniert sind.

(b) Sei nun E ein metrischer Raum, der mindestens zwei Punkte enthält, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$ eine σ-Algebra und $\mathcal{C}$ die Menge der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}_+$ nach E. Beweisen Sie $\mathcal{C} \notin \mathcal{A}^{\otimes\mathbb{R}_+}$.

Aufgabe 4. Anstatt die endlich-dimensionalen Verteilungen eines Prozesses anzugeben, ist es häufig angenehmer, die (gemeinsamen Verteilungen der) Zuwächse des Prozesses zu beschreiben. Diese Zuwächse sollten natürlich zu einer projektiven Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen führen, damit man mit dem Konsistenzsatz von Kolmogorov die Existenz des Prozesses folgern kann.

Wir betrachten die endliche Indexmenge $J = \{t_0 < \cdots < t_n\} \subseteq \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ und den zufälligen Vektor $X_J = (X_t)_{t\in J}$. Sei $T_J \colon \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}^J$ die lineare Abbildung, die den Vektor X in den Vektor $Y_J := T_J X_J = (X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})^\top$ der Zuwächse transformiert. Zu jeder Teilmenge $K \subseteq J$ gibt es die Projektion $\pi^J_K \colon \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}^K$ sowie eine lineare Abbildung $S^J_K \colon \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}^K$, die Y_K und Y_J in Beziehung setzt.

(a) Begründen Sie den Zusammenhang $S^J_K \circ T_J = T_K \circ \pi^J_K$.

(b) Geben Sie konkret die darstellenden Matrizen von T_J, T_J^{-1}, π^J_K und S^J_K im Spezialfall $J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $K = \{1, 2, 4\}$ an.

(c) Argumentieren Sie, dass die Konsistenzbedingungen für $(X_J)_{J\sqsubset\mathbb{R}_+}$ aus dem Satz von Kolmogorov zu $\mathbb{P}_{Y_K} = \mathbb{P}_{Y_J} \circ (S^J_K)^{-1}$ für alle $K \subseteq J \sqsubset \mathbb{R}_+$ äquivalent ist.