Prof. Dr. I. Veselić
Dr. C. Schumacher

Hausaufgabe 4
Abgabe am 9. 5. 2019

Aufgabe 1. Es sei $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ eine standardisierte Brownsche Bewegung, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, und $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie nach, dass $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ mit $Y_t := x + \sigma X_t + \alpha t$ eine Brownsche Bewegung mit Start in x, Driftparameter α und Diffusionsparameter σ^2 ist.

Aufgabe 2.

(a) Es sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{R}^n$ und $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ linear. Zeigen Sie, dass $Y := T \circ X$ wieder normalverteilt ist.

(b) Seien $X, Y\colon (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ unabhängige, zentrierte, $\mathbb{R}$-wertige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit endlicher Varianz $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) \in (0, \infty)$. Zeigen Sie: Es gilt $\mathbb{P}_X = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ dann und nur dann, wenn $Z := \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)$ ebenfalls die Verteilung $\mathbb{P}_X$ besitzt.

Aufgabe 3. Die Kovarianzfunktion $\Gamma\colon \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ eines zentrierten Gaußprozesses $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ erfülle für alle $t \geqslant s \geqslant 0$

$$\Gamma(s,s) + \Gamma(t,t) - 2\Gamma(s,t) \leqslant C(t-s)^\nu$$

mit zwei von s und t unabhängigen Konstanten $C, \nu > 0$. Zeigen Sie, dass es eine Version von $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ mit Hölder-stetigen Pfaden gibt und identifizieren Sie mögliche Hölder-Exponenten.

Aufgabe 4.

(a) Sei $I := \mathbb{N}$ und $E := \{0, 1\}$. Für $J \sqsubset I$ sei $\mathbb{P}_J$ die Gleichverteilung auf E^J. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{P}_J)_{J\sqsubset I}$ eine konsistente Familie ist.

(b) Wir wählen jetzt $I := \mathbb{N}_0$ und $E := \mathbb{Z}^d$. Die Menge aller Pfade der Länge $n \in \mathbb{N}$ ist

$$S_n := \{(x_t)_{t\in\mathbb{N}_0, t\leqslant n} \mid x_0 = 0 \in \mathbb{Z}^d, \forall t \in \mathbb{N}, t \leqslant n\colon x_t \in \mathbb{Z}^d, |x_t - x_{t-1}| = 1\}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{P}_{\{0,\dots,n\}}$ die Gleichverteilung auf S_n. Zeigen Sie, dass diese Wahrscheinlichkeitsmaße eindeutig eine konsistente Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen festlegen.

(c) Wir betrachten mit der Notation aus der vorigen Teilaufgabe nun im Fall $d = 2$ die selbstvermeidenden Pfade

$$\widetilde{S}_n := \{(x_t)_t \in S_n \mid \forall s, t \in \mathbb{N}, s, t \leqslant n, s \neq t\colon x_s \neq x_t\}$$

und die Gleichverteilung $\widetilde{\mathbb{P}}_{\{0,\dots,n\}}$ auf $\widetilde{S}_n$. Zeigen Sie, dass diese nicht zu einer konsistenten Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen gehören.