Brownsche Bewegung, SoSe 2019 Prof. Dr. I. Veselić

Dr. C. Schumacher

Hausaufgabe 5
Abgabe am 16. 5. 2019

Aufgabe 1. Sei $Y \sim \mathcal{N}(0, I)$ eine $\mathbb{R}^d$-wertige standardnormalverteilte Zufallsvariable und $X = m + UWY$ mit $m \in \mathbb{R}^d$, $U \in \mathbb{R}^{d\times d}$ orthogonal und $W = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_d) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ mit $\sigma_1, \ldots, \sigma_d > 0$. Wir wissen aus der Vorlesung, dass $X \sim \mathcal{N}(m, C)$ mit $C = UW^2U^\top$. Außerdem ist bekannt, dass Y die Dichte $f(x) = (2\pi)^{-d/2} \exp(-|x|^2/2)$ hat.

Rechnen Sie mit Hilfe des Transformationssatzes nach, dass X die Dichte

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det C}} \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\langle x - m, C^{-1}(x - m)\rangle\bigr)$$

hat.

Aufgabe 2. Wir betrachten ein Gauß-Maß $\nu = \mathcal{N}(m, C)$ auf $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) ν ist nicht absolutstetig bezüglich dem Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$.
(b) Die Kovarianzmatrix C ist singulär.
(c) Es gibt eine nicht-triviale affine Linearform $h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $\nu_h = \delta_0$.
(d) Es gibt eine affine Hyperebene $H \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $\nu(\mathbb{R}^d \backslash H) = 0$, sprich, ν ist auf H konzentriert.

Aufgabe 3. Es seien X, X_j, $j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariablen, und $X_j \sim \mathcal{N}(\mu_j, C_j)$, $j \in \mathbb{N}$. Weiter gelte $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X - X_n|^2] = 0$. Zeigen Sie, dass $X \sim \mathcal{N}(\mu, C)$ mit $\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n$ und $C = \lim_{n\to\infty} C_n$.

Aufgabe 4. Führen Sie die Beweise zu folgenden Aussagen aus der Vorlesung aus.

(a) Ist $(X_t)_{t\geqslant 0}$ eine standardisierte Brownsche Bewegung, so ist $(Y_t)_{t\in[0,1]}$ mit

$$Y_t = \begin{cases} (1-t)X_{\frac{t}{1-t}} & (t \in [0, 1)) \\ 0 & (t = 1) \end{cases}$$

eine standardisierte Brownsche Brücke. (Die Stetigkeit in $t = 1$ dürfen Sie auslassen.)

(b) Ist $(Y_t)_{t\in[0,1]}$ eine standardisierte Brownsche Brücke, so ist $((1 + t)Y_{\frac{1}{1+t}})_{t\in\mathbb{R}_+}$ eine standardisierte Brownsche Bewegung.

(c) Ist $(Y_t)_{t\in[0,1]}$ eine standardisierte Brownsche Brücke, so auch $(Y_{1-t})_{t\in[0,1]}$.