Brownsche Bewegung, SoSe 2019

Prof. Dr. I. Veselić
Dr. C. Schumacher

Hausaufgabe 6
Abgabe am 23. 5. 2019

Aufgabe 1. Es seien U, V unabhängige und auf dem Einheitsintervall $(0, 1)$ uniform verteilte Zufallsvariablen und

$$X := \sqrt{-2\log U}\cos(2\pi V) \quad \text{und} \quad Y := \sqrt{-2\log U}\sin(2\pi V).$$

Zeigen Sie, dass X und Y unabhängig und beide Standardnormalverteilt sind.

Hinweis: Verwenden Sie die Transformationsformel für Dichten.

Aufgabe 2. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass jede positiv semidefinite Funktion die Kovarianzfunktion eines Gauß-Prozesses ist, und die Brownsche Bewegung, wenn sie existiert, die Kovarianzfunktion $\Gamma\colon \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$, $\Gamma(s,t) = \min\{s,t\}$ hat. Zeigen Sie, dass Γ positiv semidefinit ist.

Aufgabe 3. Seien $\alpha, \sigma > 0$ und $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ eine standardisierte Brownsche Bewegung. Wir setzen für alle $t \in \mathbb{R}_+$

$$Y_t := \mathrm{e}^{-\alpha t} X_{\sigma^2 \exp(2\alpha t)}.$$

Zeigen Sie, dass $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess ist, sprich, dass $(Y_t)_t$ ein Gaussprozess mit stetigen Pfaden und der Kovarianzfunktion

$$\Gamma(s,t) = \sigma^2 \exp(-\alpha|s-t|)$$

ist. Begründen Sie außerdem explizit, dass $\Gamma\colon \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ positiv semidefinit ist.

Aufgabe 4. Sei X eine $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable mit unendlich teilbarer Verteilung, das heißt, für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es n unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen $X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$, deren Summe dieselbe Verteilung wie X hat.

Ziel dieser Aufgabe ist der Beweis der folgenden Aussage: Die charakteristische Funktion $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ hat von X keine Nullstelle.

Sei X' eine unabhängige Kopie von X und $\tilde{X} := X - X'$. Zeigen Sie:

(a) $\tilde{X}$ ist unendlich teilbar.
(b) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\varphi_{\tilde{X}}(t) = |\varphi_X(t)|^2 = |\varphi_{X_1^{(n)}}(t)|^{2n}$.
(c) Der Limes $\theta(t) := \lim_{n\to\infty} |\varphi_{X_1^{(n)}}(t)|^2$ existiert für alle $t \in \mathbb{R}$ und liegt in $\{0, 1\}$.
(d) Es gilt $\theta(t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$. (Hinweis: Stetigkeitssatz von Lévy)
(e) φ_X hat keine Nullstelle.