Brownsche Bewegung, SoSe 2019 | Prof. Dr. I. Veselić
Dr. C. Schumacher

Hausaufgabe 7
Abgabe am 30. 5. 2019

Aufgabe 1. Sei $(X_t)_{t\in I}$ ein Lévy-Prozess auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Zustandsraum $E = \mathbb{R}^d$ und $I = [0, \infty)$. Weiter sei $\mu_t := \mathbb{P}_{X_t - X_0}$ für $t \geqslant 0$ und $\mu := \mathbb{P}_{X_0}$.

(a) Sei $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ ein weiterer Lévy-Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$ mit $\tilde{\mathbb{P}}_{Y_t - Y_0} = \mu_t$ für $t \geqslant 0$ und $\tilde{\mathbb{P}}_{Y_0} = \mu$. Beweisen Sie, dass $(X_t)_{t\in I}$ und $(X_t)_{t\in I}$ äquivalent sind.

(b) Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf E sei $\mathbb{P}^\nu$ die Verteilung des Lévy-Prozesses, der durch die Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ und die Startverteilung ν charakterisiert ist. Zeigen Sie $\mathbb{P}^\mu = \int_E \mathbb{P}^{\delta_x} \mu(\mathrm{d}x)$.

Aufgabe 2. Zu einem Messraum $(E, \mathcal{A})$ und einem Element $x_0 \in E$ mit $\{x_0\} \in \mathcal{A}$ betrachten wir den Messraum $(E', \mathcal{A}')$ mit $E' := E \backslash \{x_0\}$ mit der Spur-σ-Algebra $\mathcal{A}' := \{A \cap E' \mid A \in \mathcal{A}\}$.

(a) Weiter sei $k' \colon E' \times \mathcal{A}' \to [0, 1]$ ein *Sub-Markov-Kern*, also ein Kern mit $k'(x, E') \leqslant 1$ für alle $x \in E'$. Zeigen Sie, dass es genau einen Markov-Kern $k \colon E \times \mathcal{A} \to [0, 1]$ gibt, der k' auf folgende Weise fortsetzt: Für alle $x \in E'$ und alle $B' \in \mathcal{A}'$ gilt $k(x, B') = k'(x, B')$, und für alle $B \in \mathcal{A}$ gilt $k(x_0, B) = \delta_{x_0}(B)$.

(b) Sei nun $(k'_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ eine Halbgruppe von Sub-Markov-Kernen bezüglich $\circ$ auf $E' \times \mathcal{A}'$ und k_t die Fortsetzung von k'_t, $t \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, dass $(k_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ eine (stationäre) MÜF ist.

Aufgabe 3. Sei $(k_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ eine stationäre MÜF auf dem Messraum $(E, \mathcal{B})$. Ein Punkt $a \in E$ heißt *Absorptionspunkt*, wenn

(i) $\delta_a \circ k_t = \delta_a$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$

gilt. (Hier fassen wir δ_a als Kern $E \times \mathcal{B} \ni (x, B) \mapsto \delta_a(B)$ auf.)

(a) Zeigen Sie, dass jede der folgenden Bedingungen zu (i) äquivalent ist.

  (ii) Für alle $t \geqslant 0$ und alle $f \in B^b$ gilt $(k_t f)(a) = f(a)$.
  (iii) Für alle $t \geqslant 0$ und alle $f \in B^b$ mit $f(a) = 0$ gilt $(k_t f)(a) = 0$.

  (B^b ist wie in der Vorlesung der Raum der beschränkten messbaren Funktionen auf E.)

(b) Zeigen Sie weiter, dass in Teil (b) von Aufgabe 2 dieses Blattes x_0 ein Absorptionspunkt für die MÜF ist.

Aufgabe 4. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F} := \{A \in \mathcal{A} \mid \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra ist und finden Sie eine reguläre Version der bedingten Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\,\cdot \mid \mathcal{F})(\,\cdot\,)$.