Brownsche Bewegung, SoSe 2019 — Prof. Dr. I. Veselić, Dr. C. Schumacher

Hausaufgabe 8
Abgabe am 6. 6. 2019

Aufgabe 1. Es sei X eine standardisierte Brownsche Bewegung auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Für eine Zerlegung $\tau := \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ mit $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = t$ des Intervalls $[0, t]$ ist die Feinheit definiert als $\Delta(\tau) := \max_{j=1}^n \{t_j - t_{j-1}\}$. Beweisen Sie

$$\lim_{\Delta(\tau)\searrow 0} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^n (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^2 - t\right)^2\right] = 0.$$

Bemerkung: Der L^2-Limes $V_t := \lim_{\Delta(\tau)\searrow 0} \sum_{j=1}^n (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^2$ heißt *quadratische Variation* von X.

Aufgabe 2. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X\colon \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine Brownsche Bewegung.

(a) Zeigen Sie für alle abgeschlossenen Mengen $A \subseteq \mathbb{R}$

$$X^{-1}(A) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{q\in\mathbb{Q}_+} \Big(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega, q) \in B_{\frac{1}{n}}(A)\} \times \big(q - \tfrac{1}{n}, q + \tfrac{1}{n}\big)\Big),$$

wobei $B_\varepsilon(A) := \bigcup_{a\in A}(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

(b) Folgern Sie, dass X $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar ist.

(c) Sei nun $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ eine Lebesgue-Nullmenge. Berechnen Sie die erwartete Zeit, die die Brownsche Bewegung bis zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ in N verbringt, also

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{1}_N(B_s)\,\mathrm{d}s\right].$$

Aufgabe 3. Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Borel-Raum, $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß darauf und $T\colon \Omega \to \Omega$ messbar und maßerhaltend, das heißt, für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mathbb{P}(T^{-1}(A)) = A.$$

(a) Zeigen Sie, dass die T-invarianten Mengen $\mathcal{I} := \{A \in \mathcal{A} \mid T^{-1}(A) = A\}$ eine σ-Algebra bilden.

Sei nun $\kappa\colon \Omega \times \mathcal{A} \to [0, 1]$ eine reguläre Version der bedingten Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\bullet \mid \mathcal{I})$. (Etwas präziser mit der Abbildung $\mathrm{id}\colon (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega, \mathcal{A})$: $\kappa(\omega, B) = \mathbb{P}(\mathrm{id} \in B \mid \mathcal{I})(\omega)$) Zeigen Sie, dass für $\mathbb{P}$-fast alle $\omega \in \Omega$

(b) $\kappa(\omega, \bullet)$ ein T-invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß ist, und

(c) für alle T-invarianten Ereignisse $A \in \mathcal{I}$ gilt, dass $\kappa(\omega, A) \in \{0, 1\}$.

Aufgabe 4. Es sei E ein polnischer Raum und P, Q Wahrscheinlichkeitsmaße auf E mit $Q \ll P$. Weiter sei die Radon-Nikodym-Dichte $f := \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} \leqslant c$ P-fast sicher beschränkt durch ein $c > 0$. Seien weiter X_n und U_n, $n \in \mathbb{N}$, unabhängige Zufallsvariablen so dass $X_n \sim P$ und U_n auf $[0, 1]$ gleichverteilt ist. Wir definieren $N := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid U_n \leqslant f(X_n)/c\}$ und $Y := X_N$. Zeigen Sie $Y \sim Q$.