Brownsche Bewegung, SoSe 2019 — Prof. Dr. I. Veselić, Dr. C. Schumacher

Hausaufgabe 9
Abgabe am 13. 6. 2019

Aufgabe 1. Zeigen Sie: Wenn ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in I}$ bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ ein Markov-Prozess ist, dann ist er auch ein Markov-Prozess bezüglich seiner kanonischen Filtration $(\mathcal{F}_t^X)_{t\in I}$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in I}$ ist genau dann ein Markov-Prozess bezüglich seiner kanonischen Filtration, wenn für alle $t \in I$ die σ-Algebren $\sigma(X_s, s \leqslant t)$ und $\sigma(X_s, s \geqslant t)$ bedingt auf $\sigma(X_t)$ unabhängig sind.

Aufgabe 3. Es sei $X := (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ ein (nicht notwendigerweise stationärer) stochastischer Prozess mit Zustandsraum $(E, \mathcal{B})$ und $Y_t := (X_t, t)$ für $t \in \mathbb{R}_+$. Der Prozess $Y := (Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ hat den Zustandsraum $(E \times \mathbb{R}_+, \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ und heißt der *Raum-Zeit-Prozess* zu X oder *Homogenisierung* von X.

(a) Zeigen Sie, dass X genau dann ein Markov-Prozess ist, wenn Y ein Markov-Prozess ist.
(b) Zeigen Sie, dass Y stationär bzw. zeitlich homogen ist.

Aufgabe 4. Es sei $(X_t)_{t\in I}$ ein stationärer $\mathbb{R}$-wertiger Markov-Prozess mit Markov-Halbgruppe $(P_t)_{t\in I}$, die $P_t(-x, -B) = P_t(x, B)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $t \in I$ erfüllen. Zeigen Sie, dass der Prozess $(Y_t)_{t\in I}$ mit $Y_t := |X_t|$ für $t \in I$ ebenfalls Markovsch ist.

Hinweis: Man könnte versuchen, die elementare Markov-Eigenschaft für $(Y_t)_{t\in I}$ bezüglich der kanonischen Filtration von $(X_t)_{t\in I}$ zu beweisen.