Brownsche Bewegung, SoSe 2019 Prof. Dr. I. Veselić

Dr. C. Schumacher

Hausaufgabe 10
Abgabe am 20.6.2019

Aufgabe 1. Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(E, \mathcal{B})$ Messräume und $(\mathbb{P}^x, X_t)_{x \in E, t \in \mathbb{R}_+}$ eine Markovsche Prozessfamilie auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit Werten in $(E, \mathcal{B})$. Eine Menge $A \in \mathcal{B}$ wird *Absorptionsmenge* bezüglich des Prozesses genannt, wenn für alle $x \in A$ und alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt, dass $\mathbb{P}^x(X_t \in A) = 1$. Insbesondere heißt $a \in E$ *Absorptionspunkt*, wenn $\{a\}$ eine Absorptionsmenge ist.

(a) Man zeige: Ein Punkt $a \in E$ mit $\{a\} \in \mathcal{B}$ ist genau dann ein Absorptionspunkt bezüglich des Prozesses, wenn a ein Absorptionspunkt bezüglich der Halbgruppe (P_t) der Übergangswahrscheinlichkeiten ist, siehe Blatt 7, Aufgabe 3.

(b) (gestrichen)

Aufgabe 2. Sei $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein Lévy-Prozess mit Werten in $\mathbb{R}_+$ und Faltungshalbgruppe $(\eta_t)_{t \geqslant 0}$ sowie und $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein davon unabhängiger, homogener und stationärer Markov-Prozess mit Werten in $\mathbb{R}^d$ mit Markov-Halbgruppe $(P_t)_{t \geqslant 0}$ auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Für $\omega \in \Omega$ und $t \in \mathbb{R}_+$ sei $Y_t(\omega) = X_{N_t(\omega)}(\omega)$. Der stochastische Prozess $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ heißt *subordinierter Prozess*. Zeigen Sie, dass der subordinierte Prozess ein stationärer Markov-Prozess zur Halbgruppe $(P_t^{\eta_t})_{t \in \mathbb{R}_+}$ ist, wobei $P_t^{\eta_t}$ gegeben ist durch

$$P_t^{\eta_t}(B) = \int_{\mathbb{R}_+} P_s(B) \eta_t(\mathrm{d}s)$$

für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Aufgabe 3. Es seien N Teilchen auf zwei verbundene Behälter verteilt. Zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}$ wechselt ein aus allen Teilchen gleichverteilt zufällig ausgewähltes Teilchen den Behälter. Im mikroskopischen Modell notieren wir, welches Teilchen in welchem Behälter ist: $\Omega := \{0,1\}^N$, $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$. Das makroskopische Modell notiert nur, wie viele Teilchen in Behälter 1 sind: $\Omega' := \{0, 1, \dots, N\}$, $\mathcal{A}' := \mathcal{P}(\Omega')$.

(a) Formalisieren Sie die Dynamik, indem Sie passende Markovkerne $k \colon \Omega \times \mathcal{A} \to [0,1]$ und $k' \colon \Omega' \times \mathcal{A}' \to [0,1]$ angeben.
(b) Wie hängen Ω und Ω' zusammen? Finden Sie eine Abbildung $\pi \colon \Omega \to \Omega'$, die $k(x, \pi^{-1}(B')) = k'(\pi(x), B')$ für alle $x \in \Omega$ und $B' \in \mathcal{A}'$ erfüllt.
(c) Geben Sie je eine Verteilung $\mu \colon \mathcal{A} \to [0,1]$ bzw. $\mu' \colon \mathcal{A}' \to [0,1]$ an, die $\mu \circ k = \mu$ bzw. $\mu' \circ k' = \mu'$ erfüllt. wobei $\mu \circ k$ durch $(\mu \circ k)(B) := \int k(\omega, B) \mu(\mathrm{d}\omega)$ definiert ist.

Aufgabe 4. Für $t \geqslant 0$ sei

$$P_t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + e^{-3t} & 1 - e^{-3t} \\ 2 - 2e^{-3t} & 1 + 2e^{-3t} \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $(P_t)_{t \geqslant 0}$ eine markovsche Halbgruppe bildet.
(b) Bestimmen Sie den zugehörigen infinitesimalen Generator.