Brownsche Bewegung, SoSe 2019 Prof. Dr. I. Veselić

Dr. C. Schumacher

Hausaufgabe 11
Abgabe am 27. 06. 2019

Aufgabe 1. Fast wie auf Blatt 5 in Aufgabe 4(a) sei $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ eine standardisierte Brownsche Bewegung und

$$Y_t := \begin{cases} (1-t)X_{t/(1-t)} & \text{für } t \in [0,1), \\ 0 & \text{für } t = 1. \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass $(Y_t)_{t\in[0,1]}$ fast sicher stetig in 1 ist.

Aufgabe 2. Rechnen Sie die Chapman-Kolmogorov-Gleichung für

(a) den Poisson-Prozess,
(b) die gleichmäßige Bewegung nach links und
(c) die Wärmeleitungshalbgruppe

nach.

Aufgabe 3. Es sei $(X_t)_{t\geqslant 0}$ eine standardisierte Brownsche Bewegung auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{F}_t := \sigma\{X_s \mid s \leqslant t\}$ die zugehörige kanonische Filtration. Für $s \in [0,\infty)$ betrachten wir die σ-Algebra

$$\mathcal{F}^+(s) := \bigcap\nolimits_{t>s} \mathcal{F}_t.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $s \geqslant 0$ ist der Prozess $(X_{t+s} - X_s)_{t\geqslant 0}$ unabhängig von $\mathcal{F}^+(s)$.
(b) Für alle $A \in \mathcal{F}^+(0)$ gilt $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$.

Aufgabe 4. Es seien $X, X_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, $n \in \mathbb{N}$ unabhängige Zufallsvariablen.

(a) Zeigen Sie $\mathbb{P}(X \geqslant c) \leqslant \exp(-c^2/2)$ für $c \geqslant 1/\sqrt{2\pi}$.
(b) Zeigen Sie $\mathbb{P}(X \geqslant c) \sim \exp(-c^2/2)/\sqrt{2\pi c^2}$ für $c \to \infty$, also dass der Quotient der beiden Größen gegen 1 konvergiert.
(c) Beweisen Sie $\limsup_{n\to\infty} X_n/\sqrt{2\log n} = 1$ fast sicher.

Hinweis: Wenden Sie die Borel-Cantelli-Lemmas auf die Ereignisse $\{X_n \geqslant \sqrt{(2\pm\delta)\log n}\}$ an.