Brownsche Bewegung, SoSe 2019 | Prof. Dr. I. Veselić
Dr. C. Schumacher

Hausaufgabe 12
Abgabe am 4. 7. 2019

Aufgabe 1. Sei $(X_t)_{t\geqslant 0}$ eine Brownsche Bewegung und $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ die kanonische Filtration. Berechnen Sie für alle $s, t \geqslant 0$

(a) $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s]$,
(b) $\mathbb{E}[X_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s]$ und
(c) $\mathbb{E}[\exp(\alpha X_t - \alpha^2 t/2) \mid \mathcal{F}_s]$.

Hinweis: Für $s \leqslant t$ ist der Zuwachs $X_t - X_s$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_s$.

Aufgabe 2. Es sei $(X_t)_{t\geqslant 0}$ eine standardisierte Brownsche Bewegung auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Die Tail-$\sigma$-Algebra von $(X_t)_{t\geqslant 0}$ ist definiert als $\mathcal{T} := \bigcap_{t\geqslant 0} \mathcal{G}_t$ mit $\mathcal{G}_t := \sigma\{X_s \mid s \geqslant t\}$. Beweisen Sie, dass alle $A \in \mathcal{T}$ gilt, dass $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 3 von Blatt 11.

Aufgabe 3. Eine Familie $\mathcal{M}$ von endlichen Maßen auf einem topologischen Raum $\mathcal{X}$ (mit Borel-σ-Algebra) heißt *straff*, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein Kompaktum K gibt, so dass

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}} \mu(\mathcal{X}\backslash K) < \varepsilon.$$

Zeigen Sie im Fall $\mathcal{X} = \mathbb{R}$: Eine Familie $\mathcal{M}$ von Wahrscheinlicheitsmaßen auf $\mathbb{R}$ ist genau dann straff, wenn es eine messbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mit den folgenden beiden Eigenschaften gibt:

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \infty \qquad \text{und} \qquad \sup_{\mu\in\mathcal{M}} \int f \,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

Zusatzfrage: Auf welche allgemeinere Klasse von Räumen $\mathcal{X}$ können Sie dieses Resultat verallgemeinern?

Aufgabe 4. Jede Teilmenge $L \subseteq \mathbb{R} \times (0, \infty)$ definiert eine Familie $\mathcal{M} := \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \mid (\mu, \sigma^2) \in L\}$ von Normalverteilungen auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: $\mathcal{M}$ ist genau dann straff, wenn L beschränkt ist.