Brownsche Bewegung, SoSe 2019

Prof. Dr. I. Veselić
Dr. C. Schumacher

Hausaufgabe 13
Abgabe am 11. 7. 2019

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die standardisierte eindimensionale Brownsche Bewegung rekurrent ist, also dass sie fast sicher immer wieder zu ihrem Startpunkt 0 zurückkehrt. Zeigen Sie weiter, dass Nullstellenmenge der standardisierten eindimensionalen Brownschen Bewegung sich fast sicher bei 0 häuft.

Aufgabe 2. Eine Menge $Z \subseteq \mathbb{R}$ ist perfekt, wenn sie nicht leer und abgeschlossen ist und keine isolierten Punkte enthält, oder anders formuliert, wenn jeder Punkt aus Z ein Häufungspunkt von Z ist. Zeigen Sie, dass jede perfekte Menge überabzählbar ist.

Aufgabe 3. Es seien $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, (E, d) ein metrischer Raum und $X, X_1, X_2, \ldots, Y_1, Y_2, \ldots \colon \Omega \to E$ Zufallsvariablen so dass $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X$ und $d(X_n, Y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} 0$. Beweisen Sie $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X$.

Hinweis: Nach dem Portmanteau-Theorem genügt zum Nachweis der Konvergenz in Verteilung $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, für alle Lipschitz-stetigen Funktionen $f \colon E \to \mathbb{R}$ zu prüfen, dass $\mathbb{E}f(Y_n) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}f(X)$.

Aufgabe 4. Erstellen Sie eine Übersicht / Landkarte / Mindmap, die die Begriffe und Zusammenhänge um stochastische Prozesse, Markov- und Levy-Prozesse, MÜFen, Halbgruppen, Markov-Kernen, Faltungshalbgruppen, Fellerhalbgruppen, ... darstellt.