Zufällige Graphen

Christoph Schumacher

07. Mai 2020

RGCN I, Kap. 3.1: Verzweigungsprozesse: Die Aussterbewahrscheinlichkeit

Zusammenfassung

Verzweigungsprozesse: Definition, Aussterbewahrscheinlichkeit, Familiengröße

Inhaltsverzeichnis

Fragen

1. —

1 Die Aussterbewahrscheinlichkeit

(Nach (3.1.2) ist eine sprachliche Ungenauigkeit: Zunächst ist X die Nachkommenverteilung, also ein Wahrscheinlichkeitsmaß, aber eine Zeile später behandelt er X wie eine ZV, die als Verteilung die Nachkommenverteilung hat. Meine Vermutung: X soll eine ZV sein, deren Verteilung die Zähldichte $(p_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ hat.)

Die *wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion* heißt so, weil die Ableitungen in der Null folgende Werte haben:

$$G_X(0) = \mathbb{E}[t^X]|_{t=0} \qquad = \mathbb{P}(X=0) \tag{1}$$

$$G'_X(0) = \mathbb{E}[Xt^{X-1}]|_{t=0} = \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{X=1\}}] \qquad = \mathbb{P}(X=1) \tag{2}$$

$$G_X''(0) = \mathbb{E}[X(X-1)t^{X-2}]|_{t=0} \qquad = 2\mathbb{P}(X=2) \tag{3}$$
$$G_X'''(0) = \mathbb{E}[X(X-1)(X-2)t^{X-3}]|_{t=0} \qquad = 3!\mathbb{P}(X=2) \tag{4}$$
$$G_X^{(r)}(0) = \mathbb{E}[(X)_r t^{X-r}]|_{t=0} \qquad = r!\mathbb{P}(X=r). \tag{5}$$

Das heißt, G_X verspricht, für ZVn mit Werten in $\mathbb{N}_0$ ein gutes Werkzeug zu sein. Die Taylor-Reihe von G_X ist

$$G_X(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=r)t^r. \tag{6}$$

Beachte, dass G_X bei $X \in \mathbb{N}_0$ für alle $t \in (-1,1]$ existiert und auf $(-1,1)$ analytisch ist.

2 Zu (3.1.9)

Erinnerung: Für eine ZV X und ein Ereignis A mit $\mathbb{P}(A) > 0$ ist

$$\mathbb{E}[X \mid A] := \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_A]}{\mathbb{P}(A)}. \tag{7}$$

Damit ist für eine $\mathbb{N}_0$-wertige ZV Z:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{j\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{Z=j}] &(8)\\
&= \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}_0\\ \mathbb{P}(Z=j)>0}} \mathbb{P}(Z=j)\mathbb{E}[X \mid Z=j] &(9)\\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}_0} \mathbb{P}(Z=j)\mathbb{E}[X \mid Z=j] &(10)
\end{aligned}$$

mit der Konvention $\mathbb{P}(Z=j)\mathbb{E}[X \mid Z=j] = 0$ für den Fall $\mathbb{P}(Z=j) = 0$.

Wir definieren die Nachkommen der Individuen der ersten Generation in der n-ten Generation: Für alle $j \in \mathbb{N}$ sei $Z_1^{(j)} := 1$ und für $n \geq 2$

$$Z_n^{(j)} := \sum_{k=1+\sum_{\ell=1}^{j-1} Z_{n-1}^{(\ell)}}^{\sum_{\ell=1}^{j} Z_{n-1}^{(\ell)}} X_{n,k}. \tag{11}$$

Wir bemerken, dass alle $Z_n^{(j)}$ von Z_1 unabhängig ist, dass $Z_n^{(j)} \overset{d}{=} Z_{n-1}$, und dass $(Z_n^{(j)})_j$ für alle n eine unabhängige Familie ist. Außerdem gilt

$$Z_n = \sum_{j=1}^{Z_1} Z_n^{(j)}. \tag{12}$$

(Beweis mit Induktion: Für $n=1$ gilt $\sum_{j=1}^{Z_1} Z_1^{(j)} = \sum_{j=1}^{Z_1} 1 = Z_1$. Für $n \geq 2$ haben wir

$$\sum_{j=1}^{Z_1} Z_n^{(j)} = \sum_{j=1}^{Z_1} \sum_{k=1+\sum_{\ell=1}^{j-1} Z_{n-1}^{(\ell)}}^{\sum_{\ell=1}^{j} Z_{n-1}^{(\ell)}} X_{n,k} = \sum_{j=1}^{\sum_{\ell=1}^{Z_1} Z_{n-1}^{(\ell)}} X_{n,k} \overset{\text{IV}}{=} \sum_{j=1}^{Z_{n-1}} X_{n,k} = Z_n \tag{13}$$

mit der Induktionsvoraussetzung $Z_{n-1} = \sum_{\ell=1}^{Z_1} Z_{n-1}^{(\ell)}$.)

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[s^{Z_n} \mid Z_1 = i] &= \mathbb{E}[s^{\sum_{j=1}^{Z_1} Z_n^{(j)}} \mid Z_1 = i] && (14)\\
&= \frac{\mathbb{E}[s^{\sum_{j=1}^{Z_1} Z_n^{(j)}} \mathbf{1}_{\{Z_1=i\}}]}{\mathbb{P}(Z_1 = i)} && (15)\\
&= \frac{\mathbb{E}[s^{\sum_{j=1}^{i} Z_n^{(j)}} \mathbf{1}_{\{Z_1=i\}}]}{\mathbb{P}(Z_1 = i)} && (16)\\
&= \frac{\mathbb{E}[s^{\sum_{j=1}^{i} Z_n^{(j)}}]\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Z_1=i\}}]}{\mathbb{P}(Z_1 = i)} && (17)\\
&= \mathbb{E}[s^{\sum_{j=1}^{i} Z_n^{(j)}}] && (18)\\
&= \mathbb{E}\Big[\prod\nolimits_{j=1}^{i} s^{Z_n^{(j)}}\Big] && (19)\\
&= \prod\nolimits_{j=1}^{i} \mathbb{E}\big[s^{Z_n^{(j)}}\big] && (20)\\
&= \big(G_{Z_n^{(j)}}(s)\big)^i && (21)\\
&= \big(G_{n-1}(s)\big)^i. && (22)
\end{aligned}$$

Zu Gleichung (3.1.21): Damit ist

$$T_j := \sum_{n=1}^{\infty} Z_n^{(j)} \tag{23}$$

die (Anzahl der) Nachkommenschaft des j-ten Mitglieds der ersten Generation und

$$T = 1 + \sum_{j=1}^{Z_1} T_j. \tag{24}$$

Außerdem sind $Z_1, T_1, T_2, \ldots$ unabhängig. Damit ist

$$\mathbb{E}[s^T \mid Z_1 = i] = \frac{\mathbb{E}[s^T \mathbf{1}_{\{Z_1=i\}}]}{\mathbb{P}(Z_1 = i)} \tag{25}$$

$$= \frac{\mathbb{E}[s^{1+T_1+\ldots+T_{Z_1}} \mathbf{1}_{\{Z_1=i\}}]}{\mathbb{P}(Z_1 = i)} \tag{26}$$

$$= \frac{\mathbb{E}[s^{1+T_1+\ldots+T_i} \mathbf{1}_{\{Z_1=i\}}]}{\mathbb{P}(Z_1 = i)} \tag{27}$$

$$= \frac{\mathbb{E}[s^{1+T_1+\ldots+T_i}]\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Z_1=i\}}]}{\mathbb{P}(Z_1 = i)} \tag{28}$$

$$= s\mathbb{E}\Big[\prod\nolimits_{j=1}^{i} s^{T_j}\Big] \tag{29}$$

$$= s\prod_{j=1}^{i} \mathbb{E}[s^{T_j}] \tag{30}$$

$$= s\big(G_T(s)\big)^i. \tag{31}$$