# Zufällige Graphen

Christoph Schumacher

11. Mai 2020

RGCN I, Kap. 3.2, 3.3, 3.5: Verzweigungsprozesse und Irrfahrten

**Zusammenfassung**

Erwartete Familiengröße, Verzweigungsprozesse und Irrfahrten, Verteilung der Familiengröße

## Inhaltsverzeichnis



## Fragen

1. $T$ zählt die Größe aller Generationen inklusive der ersten Generation, auch wenn *progeny* laut Wörterbuch *Nachkommenschaft* bedeutet. Die treffendere Übersetzung ist hier vielleicht *Familiengröße*.

## 1 Familiengröße

*Beweis von Theorem 3.3.* Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$:
**Induktionsanfang:** Für $n = 0$ gilt $\mathbb{E}[Z_0] = \mathbb{E}[1] = 1 = \mu^0$.
**Induktionsvoraussetzung:** Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $\mathbb{E}[Z_n] = \mu^n$.
**Induktionsschritt:** Wir betrachten

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}] = \mathbb{E}\Big[\sum\nolimits_{j=1}^{Z_n} X_{n+1,j}\Big] \tag{1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = k)\mathbb{E}\Big[\sum\nolimits_{j=1}^{Z_n} X_{n+1,j} \;\Big|\; Z_n = k\Big] \tag{2}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = k)\mathbb{E}\Big[\sum\nolimits_{j=1}^{k} X_{n+1,j} \;\Big|\; Z_n = k\Big] \tag{3}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = k)\mathbb{E}\Big[\sum\nolimits_{j=1}^{k} X_{n+1,j}\Big] \tag{4}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = k)k\mu = \mu\mathbb{E}[Z_n] \overset{\mathrm{IV}}{=} \mu^{n+1}. \qquad \square$$

*Beweis von Theorem 3.4.* Verwende die Markov-Ungleichung und Theorem 3.3:

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) = \mathbb{P}(Z_n \geq 1) \leq \mathbb{E}[Z_n] = \mu^n. \tag{5}$$

$\square$

*Beweis von Theorem 3.5.* Der Satz von Tonelli im ersten Schritt sowie Theorem 3.3 sagen

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[Z_n] = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n = (1-\mu)^{-1}. \tag{6}$$

$\square$

# 2 Irrfahrten und Verzweigungsprozesse

Schlüsselideen/-konzepte:

- Verwende Nachkommen eines Knoten minus eins als Zuwächse $Y_j := X_j - 1$ einer (in $S_0 = 1$ startenden) Irrfahrt: $S_j := \sum_{i=0}^{j} Y_i = \sum_{i=1}^{j} X_i - (i-1)$.
- Länge $t$ der ersten Exkursion der Irrfahrt ($S_t = 0$ und $S_i > 0$ für alle $i \in \{0, \ldots, t-1\}$) = Familiengröße $T$ des Verzweigungsprozesses: $T = t$
- Verlauf einer Irrfahrt $H = (X_1, \ldots, X_T)$ bis zur ersten Nullstelle (oder $T = \infty$)
- Duale Nachkommensverteilung $p'_k = \eta^{k-1} p_k$ mit $\eta = G_X(\eta)$ kleinster Fixpunkt von $G_X$ beschreibt Nachkommenschaft bei Bedingung auf Aussterben (Bemerke: bei $\eta = 1$ stirbt der Prozess sowieso aus, aber dann ist auch $p'_k = p_k$.)

Beachte: Die Reihenfolge, in der man die Knoten des Verzweigungsprozesses aktiviert, bestimmt die Kopplung zwischen Verzweigungsprozess und Irrfahrt und damit den konkreten Pfad der Irrfahrt. Die Verteilung der Irrfahrt ist allerdings bei jeder Aktivierungsreihenfolge dieselbe.

**Aufgabe 3.15**: Wir prüfen, dass die konjugierten Verteilung normiert ist:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p'_k = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^{k-1} p_k = \eta^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k p_k = \eta^{-1} G_X(\eta) = \eta^{-1}\eta = 1. \tag{7}$$

**Aufgabe 3.16**: Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion der konjugierten Verteilung: Sei $G_d(s) := \mathbb{E}[s^{X'}]$ mit $X' \sim (p'_k)_k$. Dann ist

$$G_d(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p'_k = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \eta^{k-1} p_k = \eta^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\eta s)^k p_k = \eta^{-1} G_X(\eta s). \tag{8}$$

**Aufgabe 3.17**: Wir berechnen den Erwartungswert von $X' \sim (p'_k)_k$ als Ableitung von $G_d$ in 1:

$$\mathbb{E}[X'] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=1} G_d(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=1} \eta^{-1} G_X(\eta s) = G'_X(\eta s)|_{s=1} = G'_X(\eta) < 1, \tag{9}$$

denn $\eta = G_X(\eta) < 1$, und der Graph der konvexen Funkion $G_X$ durchstößt die Winkelhalbierende $y = x$ mit einer Steigung kleiner als 1.

Zu Gleichung (3.3.11):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(k \leq T < \infty) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup\nolimits_{s=k}^{\infty} \{T = s\}\Big) && (10)\\
&\leq \sum_{s=k}^{\infty} \mathbb{P}(T = s) && (11)\\
&\leq \sum_{s=k}^{\infty} \mathbb{P}(S_s = 0) && (12)\\
&\leq \sum_{s=k}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_s \leq s) && (13)
\end{aligned}$$

# 3 Kap. 3.5: Verteilung der Familiengröße

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_k(H_0 = n \mid S_n = 0) &= \frac{\mathbb{P}_k(H_0 = n, S_n = 0)}{\mathbb{P}_k(S_n = 0)} && (14)\\
&= \frac{\mathbb{P}_k(H_0 = n)}{\mathbb{P}_k(S_n = 0)} && (15)\\
&= \frac{k}{n} && (16)
\end{aligned}$$

*Beweis zu Theorem 3.13.* Wir nutzen Theorem 3.14 für $k = 1$. Nach der Irrfahrtsdarstellung des Verzweigungsprozesses ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}_1(H_0 = n) \tag{17}$$

$$\stackrel{(3.5.5)}{=} \frac{1}{n}\mathbb{P}_1(S_n = 0) \tag{18}$$
$$= \frac{1}{n}\mathbb{P}(Y_1 + \cdots + Y_n = -1) \tag{19}$$
$$\stackrel{Y_j = X_j - 1}{=} \frac{1}{n}\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n = n-1). \qquad \square$$

Im Beweis von Theorem 3.14: Zum Induktionsanfang mit $k > 1$:

$$\mathbb{P}_k(H_0 = 1) = \mathbb{P}_k(S_0 \neq 0, S_1 = 0) = \mathbb{P}(Y_1 = -k) = 0 \tag{20}$$
$$k\mathbb{P}_k(S_1 = 0) = k\mathbb{P}(k + Y_1 = 0) = k\mathbb{P}(Y_1 = -k) = 0 \tag{21}$$

Zu Gleichung (3.5.7): Ohne Markov-Eigenschaft:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_k(H_0 = n \mid Y_1 = s) &= \mathbb{P}_k(S_1, S_2, \ldots, S_{n-1} > 0, S_n = 0 \mid Y_1 = s) && (22)\\
&= \mathbb{P}(k + Y_1, k + Y_1 + Y_2, \ldots, k + Y_1 + \cdots + Y_{n-1} > 0,\\
&\qquad k + Y_1 + \cdots + Y_n = 0 \mid Y_1 = s) && (23)\\
&= \mathbb{P}(k + s, k + s + Y_2, \ldots, k + s + Y_2 + \cdots + Y_{n-1} > 0,\\
&\qquad k + s + Y_2 + \cdots + Y_n = 0 \mid Y_1 = s) && (24)\\
&= \mathbb{P}(k + s, k + s + Y_2, \ldots, k + s + Y_2 + \cdots + Y_{n-1} > 0,\\
&\qquad k + s + Y_2 + \cdots + Y_n = 0) && (25)\\
&= \mathbb{P}(k + s, k + s + Y_1, \ldots, k + s + Y_1 + \cdots + Y_{n-2} > 0,\\
&\qquad k + s + Y_1 + \cdots + Y_{n-1} = 0) && (26)\\
&= \mathbb{P}_{k+s}(S_1, \ldots, S_{n-2} > 0, S_{n-1} = 0) && (27)\\
&= \mathbb{P}_{k+s}(H_0 = n - 1) && (28)
\end{aligned}$$

Nochmal Gleichung (3.5.7): Mit Markov-Eigenschaft der Irrfahrt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_k(H_0 = n \mid Y_1 = s) &= \mathbb{P}_k(S_1, S_2, \ldots, S_{n-1} > 0, S_n = 0 \mid Y_1 = s) && (29)\\
&= \mathbb{P}(S_1, S_2, \ldots, S_{n-1} > 0, S_n = 0 \mid Y_1 = s, S_0 = k) && (30)\\
&= \mathbb{P}(S_1, S_2, \ldots, S_{n-1} > 0, S_n = 0 \mid S_1 = k + s, S_0 = k) && (31)\\
&\stackrel{\substack{\text{ME,}\\ s+k>0}}{=} \mathbb{P}(S_1, S_2, \ldots, S_{n-2} > 0, S_{n-1} = 0 \mid S_0 = k + s) && (32)\\
&= \mathbb{P}_{k+s}(S_1, S_2, \ldots, S_{n-2} > 0, S_{n-1} = 0) && (33)\\
&= \mathbb{P}_{k+s}(H_0 = n - 1) && (34)
\end{aligned}$$

Zu Gleichung (3.5.9):

$$\mathbb{P}_k(H_0 = n) = \sum_{s=-1}^{\infty} \frac{k+s}{n-1}\mathbb{P}_k(S_n = 0 \mid Y_1 = s)\mathbb{P}(Y_1 = s) \tag{35}$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{s=-1}^{\infty} (k+s) \mathbb{P}_k(S_n = 0, Y_1 = s) \tag{36}$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{s=-1}^{\infty} (k+s) \underbrace{\mathbb{P}_k(Y_1 = s \mid S_n = 0)}_{= \frac{\mathbb{P}_k(Y_1 = s, S_n = 0)}{\mathbb{P}_k(S_n = 0)}} \mathbb{P}_k(S_n = 0) \tag{37}$$

$$= \frac{\mathbb{P}_k(S_n = 0)}{n-1} \sum_{s=-1}^{\infty} (k+s) \overbrace{\mathbb{E}_k[\mathbf{1}_{\{Y_1 = s\}} \mid S_n = 0]}^{= \frac{\mathbb{E}_k[\mathbf{1}_{\{Y_1 = s\}} \mathbf{1}_{\{S_n = 0\}}]}{\mathbb{P}_k(S_n = 0)}} \tag{38}$$

$$= \frac{\mathbb{P}_k(S_n = 0)}{n-1} \sum_{s=-1}^{\infty} \mathbb{E}_k[(k+s)\mathbf{1}_{\{Y_1 = s\}} \mid S_n = 0] \tag{39}$$

$$= \frac{\mathbb{P}_k(S_n = 0)}{n-1} \sum_{s=-1}^{\infty} \mathbb{E}_k[(k+Y_1)\mathbf{1}_{\{Y_1 = s\}} \mid S_n = 0] \tag{40}$$

$$= \frac{\mathbb{P}_k(S_n = 0)}{n-1} \mathbb{E}_k\left[(k+Y_1) \sum_{s=-1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{Y_1 = s\}} \;\middle|\; S_n = 0\right] \tag{41}$$

$$= \frac{\mathbb{P}_k(S_n = 0)}{n-1} \mathbb{E}_k[k + Y_1 \mid S_n = 0] \tag{42}$$

$$= \frac{\mathbb{P}_k(S_n = 0)}{n-1} \big(k + \mathbb{E}_k[Y_1 \mid S_n = 0]\big) \tag{43}$$