Zufällige Graphen

Christoph Schumacher

14. Mai 2020

RGCN I, Kap. 3.6 ohne Theorem 3.17, 3.7:
Poisson- und Binomial-Verzweigungsprozesse

Zusammenfassung

Poissonsche Verzweigungsprozesse, Vergleich mit Binomialverteilungsverzweigungsprozessen

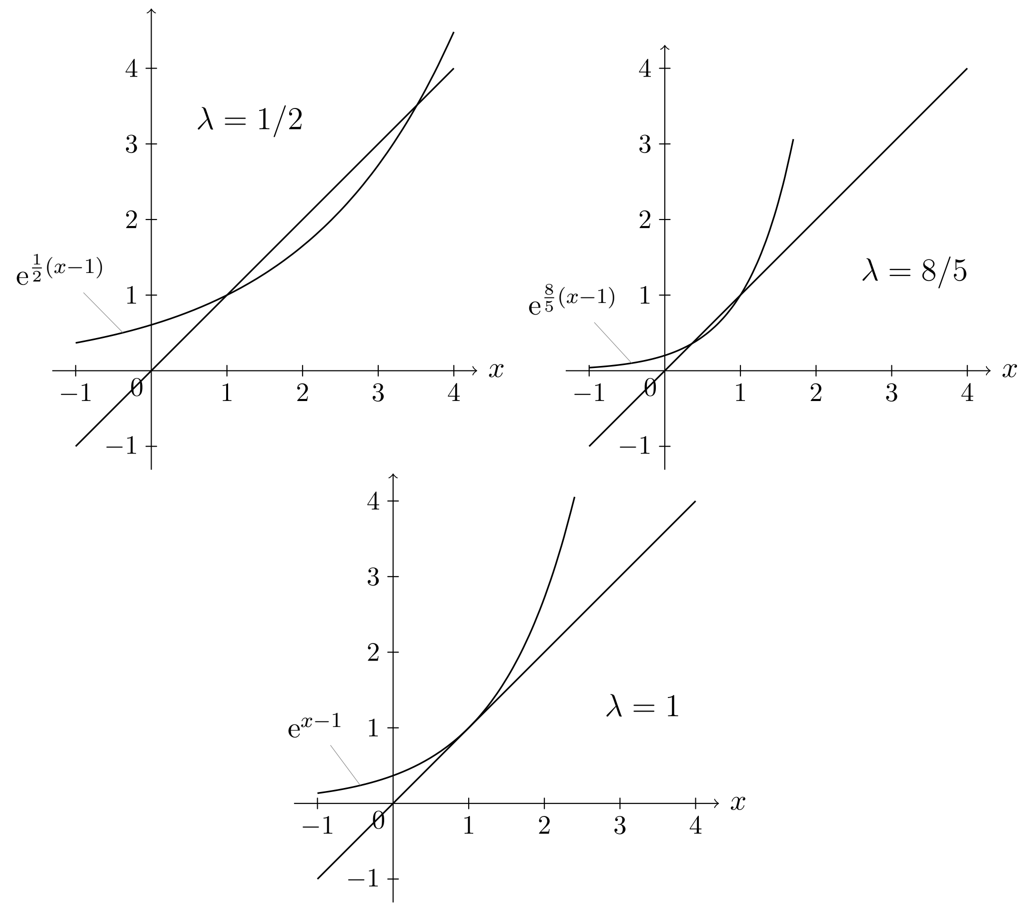
Inhaltsverzeichnis

Fragen

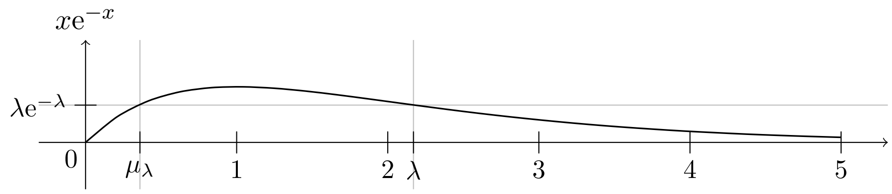
1. —

1 Poisson-verteilte Nachkommenverteilung in Verzweigungsprozessen

Zu (3.6.2):



Zum Zusammenhang von λ und μ_λ:



Beweis von Theorem 3.16. Wir verwenden Theorem 3.13:

$$\mathbb{P}^*_\lambda(T^* = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}^*_\lambda(\underbrace{X^*_1 + \cdots + X^*_n}_{\sim \mathrm{Poi}(\lambda n)} = n-1) = \frac{1}{n} \cdot \frac{(\lambda n)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda n}. \qquad \square$$

Frage: Was ist

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}^*_\lambda(T^* = n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(\lambda n)^{n-1}}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda n} \quad ? \tag{1}$$

Vermutung: Es sollte η_λ herauskommen.

Stategie: Dann sollten wir $G^*_\lambda(s) = \sum_{i=0} s^i \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = \mathrm{e}^{\lambda(s-1)}$ ins Spiel bringen.

Wir rechnen rückwärts:

$$\eta_\lambda = \mathrm{e}^{\lambda(\eta_\lambda - 1)} = \sum_{i=0}^{\infty} \eta_\lambda^i \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \tag{2}$$

Momentan kommen wir nicht weiter.

Die Stirling-Formel:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \tag{3}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}} \tag{4}$$

Damit erhalten wir (3.6.25), denn in

$$\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{12n+1}} - 1}{\frac{1}{n}} \leq \frac{n! - \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \cdot \frac{1}{n}} \leq \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{12n}} - 1}{\frac{1}{n}} \tag{5}$$

konvergieren die beiden äußeren Terme dank l'Hospital beide gegen $\frac{1}{12}$, also ist die Folge in der Mitte beschränkt.

Die Funktion f aus (3.6.28) ist monoton fallend:

$$f'(x) = \frac{x^{-1}(x-1) - \log x}{(x-1)^2} = -\frac{x \log x - (x-1)}{x(x-1)^2} < 0, \tag{6}$$

da $x \mapsto x - 1$ die Tangente an die strikt konvexe Funktion $x \mapsto x \log x$ an der Stelle $x = 1$ ist ($x \log x|_{x=1} = 0$, $(x \log x)'|_{x=1} = \log x + 1|_{x=1} = 1$, $(x \log x)'' = 1/x > 0$).

Die Inverse einer stetig differenzierbaren Funktion ist stetig differenzierbar, denn

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \tag{7}$$

ist stetig.

$$f^{-1}(\lambda) = \eta_\lambda \tag{8}$$

$$
\begin{aligned}
&\iff f(\eta_\lambda) = \lambda && (9)\\
&\iff \frac{\log \eta_\lambda}{\eta_\lambda - 1} = \lambda && (10)\\
&\iff \log \eta_\lambda = \lambda(\eta_\lambda - 1) && (11)\\
&\iff \eta_\lambda = \mathrm{e}^{\lambda(\eta_\lambda - 1)} && (12)
\end{aligned}
$$

2 Vergleich Binomial und Poisson

Frage: Wie geht das ähnliche Argument für (3.7.11)?

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(T^* \geq k, T < k) &\leq \sum_{s=1}^{k-1} \mathbb{P}(X_i = X_i^* \forall i \leq s-1, X_s \neq X_s^*, T^* \geq k) && (13)\\
&\leq \sum_{s=1}^{k-1} \mathbb{P}(X_s \neq X_s^*, T^* \geq k) && (14)\\
&\leq \sum_{s=1}^{k-1} \mathbb{P}(X_s \neq X_s^*, T^* \geq s) && (15)\\
&= \sum_{s=1}^{k-1} \mathbb{P}(X_s \neq X_s^*)\mathbb{P}(T^* \geq s) && (16)\\
&\leq \frac{\lambda^2}{n} \sum_{s=1}^{k-1} \mathbb{P}(T^* \geq s) && (17)
\end{aligned}
$$