Zufällige Graphen

Christoph Schumacher

25. Mai 2020

RGCN I, Kap. 4.3, 4.4:
Der subkritische Erdős-Rényi-Graph II

Zusammenfassung

Verhalten der größten Zusammenhangskomponente im subkritischen Fall $\lambda < 1$ und im superkritischen Fall $\lambda > 1$

Inhaltsverzeichnis

1 Maximale Zusammenhangskomponente subkritisch 1

Fragen

1. —

1 Maximale Zusammenhangskomponente subkritisch

Bei beiden Beweisen von Theorem 4.2 ist etwas unklar. Für $t \in [0, \infty)$, insbesondere wenn t nicht ganzzahlig ist, muss man in (4.3.10) erst einmal t abrunden:

$$\mathbb{P}_{n,p}(T > t) = \mathbb{P}_{n,p}(T > \lfloor t \rfloor) \leq \mathbb{P}_{n,p}(\hat{S}_{\lfloor t \rfloor} > 0) = \mathbb{P}_{n,p}(\hat{X}_1 + \cdots + \hat{X}_{\lfloor t \rfloor} \geq \lfloor t \rfloor) \tag{1}$$

$$\leq \mathrm{e}^{-\lfloor t \rfloor I_\lambda} \tag{2}$$

Dadurch erhält man in (4.3.12)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_\lambda(|\mathcal{C}_{\max}| > a\log n) &= \mathbb{P}_\lambda\Big(\bigcup\nolimits_{v\in[n]}|\mathcal{C}(v)| > a\log n\Big) && (3)\\
&\le \sum\nolimits_{v\in[n]} \mathbb{P}_\lambda(|\mathcal{C}(v)| > a\log n) && (4)\\
&= n\,\mathbb{P}_\lambda(|\mathcal{C}(1)| > a\log n) && (5)\\
&\le n\mathrm{e}^{-\lfloor a\log n\rfloor I_\lambda} && (6)\\
&\le n\mathrm{e}^{-(a\log n-1)I_\lambda} && (7)\\
&= n\mathrm{e}^{I_\lambda}\big(\mathrm{e}^{\log n}\big)^{-aI_\lambda} && (8)\\
&= \mathrm{e}^{I_\lambda}n^{-(aI_\lambda-1)} = \mathrm{e}^{I_\lambda}n^{-\delta} = O(n^{-\delta}). && (9)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4.15: Annahme: $N \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ mit $n\in\mathbb{N}$ und $p\in[0,1]$ und, bedingt auf N, $M\sim\mathrm{Bin}(N,q)$ mit $q\in[0,1]$. Wir berechnen die Verteilung von M. Für $k\in\mathbb{N}_0$ ist

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(M=k) &= \sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}(M=k\mid N=j)\,\mathbb{P}(N=j) && (10)\\
&= \sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k}q^k(1-q)^{j-k}\binom{n}{j}p^j\,(1-p)^{n-j}. && (11)
\end{aligned}
$$

Wir vereinfachen die Binomialkoeffizienten:

$$
\begin{aligned}
\binom{j}{k}\binom{n}{j} &= \frac{j!}{k!(j-k)!}\cdot\frac{n!}{j!(n-j)!} && (12)\\
&= \binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{(j-k)!(n-j)!} && (13)\\
&= \binom{n}{k}\binom{n-k}{j-k} && (14)
\end{aligned}
$$

und klammern aus und verschieben den Index $\ell := j-k$ bzw. $j=\ell+k$ und verwenden den binomischen Lehrsatz:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(M=k) && (15)\\
&= \binom{n}{k}q^k\sum_{j=k}^{n}\binom{n-k}{j-k}(1-q)^{j-k}p^j(1-p)^{n-j} && (16)\\
&= \binom{n}{k}q^k\sum_{\ell=0}^{n-k}\binom{n-k}{\ell}(1-q)^{\ell}p^{\ell+k}(1-p)^{n-(\ell+k)} && (17)
\end{aligned}
$$

$$= \binom{n}{k} (pq)^k \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell} \big(p(1-q)\big)^{\ell} (1-p)^{n-k-\ell} \tag{18}$$

$$= \binom{n}{k} (pq)^k \big(p(1-q) + 1 - p\big)^{n-k} \tag{19}$$

$$= \binom{n}{k} (pq)^k (1-pq)^{n-k} \tag{20}$$

Das heißt $M \sim \mathrm{Bin}(n, pq)$.

Wir zeigen $\forall t \in [n]\colon N_t \sim \mathrm{Bin}(n-1, (1-p)^t)$ mittels Induktion über $t \in \mathbb{N}_0$:

IA: Für $t = 0$ ist $N_0 = n - 1$ fast sicher, also $N_0 \sim \mathrm{Bin}(n-1, (1-p)^0)$, das passt.

IV: Für ein $t \in \mathbb{N}$ gilt $N_{t-1} \sim \mathrm{Bin}(n-1, (1-p)^{t-1})$.

IS: Bekannt aus (4.3.16): $\forall t \in \mathbb{N}\colon N_t \sim \mathrm{Bin}(N_{t-1}, 1-p)$. Mit der Induktionsvoraussetzung ist dann nach obiger Rechnung

$$N_t \sim \mathrm{Bin}(n-1, (1-p)(1-p)^{t-1}) = \mathrm{Bin}(n-1, (1-p)^t). \tag{21}$$

Der Rest des zweiten Beweises sieht aus, als macht man alles vom ersten Beweis nochmal von Hand. Insbesondere ist das Rundungsproblem nicht gelöst.

Zum Beweis von Proposition 4.7:

$$\mathrm{Var}_\lambda(Z_{\geq k}) = \mathbb{E}_\lambda[Z_{\geq k}^2] - \big(\mathbb{E}_\lambda[Z_{\geq k}]\big)^2 \tag{22}$$

$$= \mathbb{E}_\lambda\Big[\sum\nolimits_{i,j\in[n]} \mathbf{1}_{\{|\mathcal{C}(i)|\geq k\}} \mathbf{1}_{\{|\mathcal{C}(j)|\geq k\}}\Big] - \Big(\mathbb{E}_\lambda\Big[\sum\nolimits_{i\in[n]} \mathbf{1}_{\{|\mathcal{C}(i)|\geq k\}}\Big]\Big)^2 \tag{23}$$

$$= \sum_{i,j\in[n]} \big(\mathbb{P}_\lambda(|\mathcal{C}(i)| \geq k, |\mathcal{C}(j)| \geq k) - \mathbb{P}_\lambda(|\mathcal{C}(i)| \geq k)\, \mathbb{P}_\lambda(|\mathcal{C}(j)| \geq k)\big) \tag{24}$$

Zu Ungleichung (4.3.26): Irgendwie geht da noch die Austauschbarkeit der Knoten ein. Hier eine etwas detailliertere Erklärung:[1] Wir verwenden die folgende Rechenregel für bedingte Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathbb{P}(A \cap C \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(B \cap C)} \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(B)} \tag{25}$$

$$= \mathbb{P}(A \mid B \cap C)\, \mathbb{P}(C \mid B) \tag{26}$$

[1] Notation: $\binom{M}{l} := \{C \subseteq M \mid |C| = l\}$ notiert die Menge der l-elementigen Teilmengen der Menge M. Wenn M endlich ist, gilt $|\binom{M}{l}| = \binom{|M|}{l}$.

$$\mathbb{P}_\lambda\big(|\mathcal{C}(j)| \geq k \,\big|\, |\mathcal{C}(i)| = l, i \not\leftrightarrow j\big) \tag{27}$$

$$= \sum\nolimits_{C \in \binom{[n]\setminus\{j\}}{l}} \mathbb{P}_\lambda\big(\mathcal{C}(i) = C \,\big|\, |\mathcal{C}(i)| = l, i \not\leftrightarrow j\big) \cdot$$

$$\cdot\, \mathbb{P}_\lambda\big(|\mathcal{C}(j)| \geq k \,\big|\, \mathcal{C}(i) = C, |\mathcal{C}(i)| = l, i \not\leftrightarrow j\big) \tag{28}$$

$$= \sum\nolimits_{C \in \binom{[n]\setminus\{j\}}{l}} \mathbb{P}_\lambda\big(\mathcal{C}(i) = C \,\big|\, |\mathcal{C}(i)| = l, i \not\leftrightarrow j\big) \cdot$$

$$\cdot\, \mathbb{P}_\lambda\big(|\mathcal{C}(j)| \geq k \,\big|\, \mathcal{C}(i) = C, |\mathcal{C}(i)| = l, i \not\leftrightarrow j\big) \tag{29}$$

$$= \sum\nolimits_{C \in \binom{[n]\setminus\{j\}}{l}} \mathbb{P}_\lambda\big(\mathcal{C}(i) = C \,\big|\, |\mathcal{C}(i)| = l, i \not\leftrightarrow j\big)\, \mathbb{P}_\lambda\big(|\mathcal{C}(j)| \geq k \,\big|\, \mathcal{C}(i) = C\big) \tag{30}$$

$$\leq \underbrace{\sum\nolimits_{C \in \binom{[n]\setminus\{j\}}{l}} \mathbb{P}_\lambda\big(\mathcal{C}(i) = C \,\big|\, |\mathcal{C}(i)| = l, i \not\leftrightarrow j\big)}_{=1} \mathbb{P}_\lambda(|\mathcal{C}(j)| \geq k) \tag{31}$$

$$= \mathbb{P}_\lambda(|\mathcal{C}(j)| \geq k) \tag{32}$$

Die erste Ungleichung verwendet, dass der Erdős-Rényi-Graph $\mathrm{ER}_n(\lambda/n)$ eingeschränkt auf $[n] \setminus C$ in Verteilung gleich dem Erdős-Rényi-Graph $\mathrm{ER}_{n-l}(\lambda/n)$ mit Kantenwahrscheinlichkeit $p = \lambda/n$ auf einer Menge mit $n - l$ Knoten ist, und dass alle Cluster bei gleicher Kantenwahrscheinlichkeit mit der Anzahl der Knoten wachsen (Kopplung).

Im Beweis von Theorem 4.5:
Mein Vorschlag: Wir setzen $k_n := \lceil a \log n \rceil$, denn dann ist

$$Z_{\geq a \log n} = \sum\nolimits_{v \in [n]} \mathbf{1}_{\{|\mathcal{C}(v)| \geq a \log n\}} = \sum\nolimits_{v \in [n]} \mathbf{1}_{\{|\mathcal{C}(v)| \geq k_n\}} = Z_{\geq k_n}. \tag{33}$$

Gleichung (4.3.34) lautet dann

$$\mathbb{P}_{n-k_n,p}(T \geq k_n) = \mathbb{P}^*_{\lambda_n}(T^* \geq k_n) + O\Big(\frac{a\lambda^2 \log n}{n}\Big). \tag{34}$$

Der O-term ist in der Notation von Theorem 3.20 beschränkt durch

$$|e_{n-k_n}(k_n)| \leq \frac{k_n \lambda^2}{n - k_n} \leq \frac{\lceil a \log n \rceil \lambda^2}{n}, \tag{35}$$

und tatsächlich ist

$$\frac{|e_{n-k_n}(k_n)|}{\frac{a\lambda^2 \log n}{n}} \leq \frac{\lceil a \log n \rceil \lambda^2}{n} \cdot \frac{n}{a\lambda^2 \log n} = \frac{\lceil a \log n \rceil}{a \log n} \leq \frac{a \log n + 1}{a \log n} \xrightarrow{n \to \infty} 1, \tag{36}$$

also ist der Fehlerterm richtig.

In den Gleichungen (4.3.36) und (4.3.37) lassen wir die Summe am Anfang weg, nicht erst am Ende:

$$\mathbb{P}^*_{\lambda_n}(T^* \geq k_n) \geq \mathbb{P}^*_{\lambda_n}(T^* = k_n) = \frac{(\lambda_n k_n)^{k_n-1}}{k_n!}\mathrm{e}^{-\lambda_n k_n} \tag{37}$$

Die Stirling-Formel ist richtig, denn ein $O(n^{-1})$ ist auch ein $o(1)$. Außerdem ist

$$\frac{1}{1+o(1)} = 1 + o(1), \tag{38}$$

denn für alle $a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ ist

$$\frac{1}{1+a_k} = 1 - \frac{a_k}{1+a_k} \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{1+a_k}\right| = \frac{0}{1+0} = 0. \tag{39}$$

Also ist

$$\frac{1}{k_n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi k_n}(k_n/\mathrm{e})^{k_n}(1+o(1))} = \frac{1}{\sqrt{2\pi k_n}(k_n/\mathrm{e})^{k_n}}(1+o(1)) \tag{40}$$

Das wollen wir in (37) verwenden:

$$\mathbb{P}^*_{\lambda_n}(T^* \geq k_n) \geq \frac{(\lambda_n k_n)^{k_n-1}}{k_n!}\mathrm{e}^{-\lambda_n k_n} \tag{41}$$

$$= \frac{(\lambda_n k_n)^{k_n-1}}{\sqrt{2\pi k_n}(k_n/\mathrm{e})^{k_n}}\mathrm{e}^{-\lambda_n k_n}(1+o(1)) \tag{42}$$

$$= \lambda_n^{-1}\frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_n-1-\log\lambda_n)k_n}}{\sqrt{2\pi k_n^3}}(1+o(1)) \tag{43}$$

$$= \exp\bigl(-I_{\lambda_n}k_n - \log\bigl(\lambda_n\sqrt{2\pi k_n^3}/(1+o(1))\bigr)\bigr) \tag{44}$$

$$= \exp\Bigl(-I_\lambda a\log n\Bigl(1 + \underbrace{\frac{I_{\lambda_n}k_n}{I_\lambda a\log n} - 1}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\log(\lambda_n\sqrt{2\pi k_n^3}(1+o(1)))}{I_\lambda a\log n}}_{\to 0}\Bigr)\Bigr) \tag{45}$$

$$= \exp\bigl(-I_\lambda a\log n(1+o(1))\bigr). \tag{46}$$

Jetzt setzen wir zusammen:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_\lambda[Z_{\geq k_n}] &\overset{(4.3.32)}{=} n\,\mathbb{P}_\lambda(|\mathcal{C}(1)| \geq k_n) && (47)\\
&\overset{(4.3.33)}{\geq} n\,\mathbb{P}_{n-k_n,p}(T \geq k_n) && (48)\\
&\overset{(4.3.34)}{=} n\Big(\mathbb{P}^*_{\lambda_n}(T^* \geq k_n) + O\Big(\frac{a\lambda^2 \log n}{n}\Big)\Big) && (49)\\
&\overset{(4.3.37)}{\geq} n\exp\big(-I_\lambda a \log n(1+o(1))\big) + O(a\lambda^2 \log n) && (50)\\
&= n\big(\mathrm{e}^{\log n}\big)^{-I_\lambda a(1+o(1))} + O(a\lambda^2 \log n) && (51)\\
&= n^{1-I_\lambda a(1+o(1))} + O(a\lambda^2 \log n) && (52)\\
&= n^\alpha\big(\underbrace{n^{1-I_\lambda a(1+o(1))-\alpha}}_{\to\infty} + \underbrace{n^{-\alpha}O(a\lambda^2 \log n)}_{\to 0}\big) && (53)\\
&\geq n^\alpha && (54)
\end{aligned}
$$

für n genügend groß, denn wegen $\alpha < 1 - I_\lambda a$ ist

$$
1 - I_\lambda a(1+o(1)) - \alpha \xrightarrow{n\to\infty} 1 - I_\lambda a - \alpha > 0, \tag{55}
$$

und dass es ein n_0 gibt, so dass der Exponent für alle $n \geq n_0$ größer als 0 ist. Damit ist trotz des O-Terms $\mathbb{E}_\lambda[Z_{\geq k}] \geq n^\alpha$ für alle genügend großen n.

Zu (4.3.40): Der Quotient

$$
\begin{aligned}
\frac{k_n \mathrm{e}^{-(k_n-1)I_\lambda} + \mathrm{e}^{-k_n I_\lambda}/(1-\mathrm{e}^{-I_\lambda})}{k_n n^{-aI_\lambda}} &= \mathrm{e}^{-(k_n - a\log n - 1)I_\lambda} + \frac{\mathrm{e}^{-(k_n - a\log n)I_\lambda}}{k_n(1-\mathrm{e}^{-I_\lambda})} && (56)\\
&\leq \mathrm{e}^{I_\lambda} + o(1) && (57)
\end{aligned}
$$

ist beschränkt.