Zufällige Graphen

Christoph Schumacher

25. Mai 2020

RGCN I, Kap. 4.3, 4.4:
Der subkritische Erdős-Rényi-Graph II

Zusammenfassung

Verhalten der größten Zusammenhangskomponente im superkritischen Fall $\lambda > 1$

Inhaltsverzeichnis

Fragen

1. Normalerweise normiert man im GGZ mit $\frac{1}{n}$ und nicht mit $\frac{1}{n^\nu}$, $\nu \in (\frac{1}{2}, 1)$. Warum heißt Theorem 4.8 „Gesetz der großen Zahlen“? — Das schwache GGZ für eine i. i. d.-Folge $(X_j)_j$ mit $\sigma^2 := \operatorname{Var}(X_1) < \infty$ lautet: Für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\big(X_j - \mathbb{E}[X_j]\big)\Big| \geq \varepsilon\Big) \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{1}$$

Der Beweis verwendet die Chebychev-Ungleichung und funktioniert auch für

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{1}{n^\nu}\sum_{j=1}^{n}\big(X_j - \mathbb{E}[X_j]\big)\Big| \geq \varepsilon\Big) &\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\Big[\Big(\frac{1}{n^\nu}\sum_{j=1}^{n}\big(X_j - \mathbb{E}[X_j]\big)\Big)^2\Big] &(2)\\
&= \frac{1}{\varepsilon^2 n^{2\nu}}\operatorname{Var}\Big(\sum_{j=1}^{n}\big(X_j - \mathbb{E}[X_j]\big)\Big) &(3)\\
&= \frac{1}{\varepsilon^2 n^{2\nu}}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Var}\big(X_j - \mathbb{E}[X_j]\big) &(4)\\
&= \frac{n\sigma^2}{\varepsilon^2 n^{2\nu}} = \Big(\frac{\sigma}{\varepsilon n^{\nu-\frac{1}{2}}}\Big)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\nu>\frac{1}{2}} 0, &(5)
\end{aligned}$$

zumindest wenn $\nu > \frac{1}{2}$. Für $\nu = \frac{1}{2}$ sagt der zentrale Grenzwertsatz

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\sum_{j=1}^{n}\big(X_j - \mathbb{E}[X_j]\big)\Big| \geq \varepsilon\Big) \xrightarrow{n\to\infty} 1 - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 1. \tag{6}$$

Also ist $\nu > \frac{1}{2}$ für das schwache Gesetz der großen Zahlen optimal.

2. Wo ist das ε? — Das ε kann man wieder reinschreiben, denn wir können am ν drehen. Zu $\nu \in (\frac{1}{2}, 1)$ definieren wir $\nu' := (\nu + \frac{1}{2})/2 \in (\frac{1}{2}, \nu)$. Für $\varepsilon > 0$ und $n \geq \varepsilon^{-\nu'}$ ist dann

$$\varepsilon n^{\nu} = \underbrace{\varepsilon n^{\nu - \nu'}}_{\geq 1} n^{\nu'} \geq n^{\nu'}. \tag{7}$$

Also ist für n groß

$$\big\{\big||\mathcal{C}_{\max}| - \zeta_\lambda n\big| \geq \varepsilon n^{\nu}\big\} \subseteq \big\{\big||\mathcal{C}_{\max}| - \zeta_\lambda n\big| \geq n^{\nu'}\big\}, \tag{8}$$

und das ε stört gar nicht.

3. In der Form

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\sum_{j=1}^{n} X_j - \mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^{n} X_j\Big]\Big| \geq \varepsilon n\Big) \xrightarrow{n \to \infty} 0 \tag{9}$$

erkennt man, dass Theorem 4.8 tatsächlich ein GGZ ist.

4. Warum ist $\nu = 1$ in Theorem 4.8 nicht zugelassen? — Wegen $|\mathcal{C}_{\max}| \leq n$ ist $\nu = 1$ trivial, da ist die Wahrscheinlichkeit sowieso gleich 0.

1 Superkritisches Verhalten

1.1 Schritt 1

Proposition 4.9 kann man problemlos konkreter beweisen:

$$\begin{align}
\mathbb{P}_\lambda(|\mathcal{C}(v)| \geq k_n) &\leq \mathbb{P}_{n,\lambda/n}(T \geq k_n) \tag{10}\\
&\leq \mathbb{P}^*_\lambda(T^* \geq k_n) + \lambda^2 k_n/n \tag{11}\\
&\leq \zeta_\lambda + \frac{\mathrm{e}^{-k_n I_\lambda}}{1 - \mathrm{e}^{-I_\lambda}} + \frac{\lambda^2 k_n}{n} \tag{12}\\
&\leq \zeta_\lambda + \frac{\mathrm{e}^{-a I_\lambda \log n}}{1 - \mathrm{e}^{-I_\lambda}} + \frac{\lambda^2 k_n}{n} \tag{13}\\
&= \zeta_\lambda + \frac{n^{-a I_\lambda}}{1 - \mathrm{e}^{-I_\lambda}} + \frac{\lambda^2 k_n}{n}. \tag{14}
\end{align}$$

Damit kann man sofort obere Schranke in Proposition 4.9 herleiten:

$$\begin{align}
\limsup_{n \to \infty} \frac{\mathbb{P}_\lambda(|\mathcal{C}(v)| \geq k_n) - \zeta_\lambda}{k_n/n} &\leq \limsup_{n \to \infty} \frac{\frac{n^{-a I_\lambda}}{1 - \mathrm{e}^{-I_\lambda}} + \frac{\lambda^2 k_n}{n}}{k_n/n} \tag{15}\\
&\leq \limsup_{n \to \infty} \frac{n^{1 - a I_\lambda}}{(1 - \mathrm{e}^{-I_\lambda}) a \log n} + \lambda^2 \tag{16}\\
&= \lambda^2 < \infty, \tag{17}
\end{align}$$

und das stimmt sogar für $a \geq \frac{1}{I_\lambda}$.

Die untere Schranke:

$$\begin{align}
\mathbb{P}_\lambda(|\mathcal{C}(v)| \geq k_n) &\geq \mathbb{P}_{n-k_n,\lambda/n}(T \geq k_n) \tag{18}\\
&\geq \mathbb{P}^*_{\lambda_n}(T^* \geq k_n) - \lambda_n^2 k_n/n \tag{19}\\
&\geq \zeta_{\lambda_n} - \frac{\lambda^2 k_n}{n} \tag{20}
\end{align}$$

$$= \zeta_\lambda + \zeta'_{\lambda_n^*}(\lambda_n - \lambda) - \frac{\lambda^2 k_n}{n} \tag{21}$$

$$= \zeta_\lambda - \zeta'_{\lambda_n^*}\lambda\frac{k_n}{n} - \frac{\lambda^2 k_n}{n}. \tag{22}$$

Dabei ist $\lambda_n = \frac{\lambda}{n}(n - k_n) = \lambda(1 - \frac{k_n}{n})$ und $\lambda_n^* \in (\lambda_n, \lambda)$ die passende Stelle aus dem Mittelwertsatz. Wir schließen, dass

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}_\lambda(|\mathcal{C}(v)| \geq k_n) - \zeta_\lambda}{k_n/n} \geq - \liminf_{n\to\infty}(\zeta'_{\lambda_n^*}\lambda + \lambda^2) \tag{23}$$

$$= -\zeta'_\lambda\lambda - \lambda^2 > -\infty, \tag{24}$$

denn $\lambda \mapsto \zeta_\lambda$ ist stetig differenzierbar und $\lambda_n \to \lambda$. (Diese Richtung ist sogar für alle $a > 0$ korrekt.)

1.2 Schritt 2

Zu (4.4.20):

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}_\lambda(Z_{<k}) &= \operatorname{Cov}_\lambda(Z_{<k}, Z_{<k}) && (25)\\
&= \sum_{i,j\in[n]} \big(\mathbb{E}_\lambda[\mathbf{1}_{\{|\mathcal{C}(i)|<k\}}\mathbf{1}_{\{|\mathcal{C}(j)|<k\}}] - \mathbb{E}_\lambda[\mathbf{1}_{\{|\mathcal{C}(i)|<k\}}]\,\mathbb{E}_\lambda[\mathbf{1}_{\{|\mathcal{C}(j)|<k\}}]\big) && (26)\\
&= \sum_{i,j\in[n]} \big(\mathbb{P}_\lambda(|\mathcal{C}(i)| < k, |\mathcal{C}(j)| < k) - \big(\mathbb{P}_\lambda(|\mathcal{C}(j)| < k)\big)^2\big). && (27)
\end{aligned}$$

Zu (4.4.27): “This has probability at most lkp”: Tatsächlich hat das beschriebene Ereignis die Wahrscheinlichkeit $1 - (1 - p)^{kl}$, denn von den $k \cdot l$ möglichen Kanten soll mindestens eine, also nicht gar keine, aktiv sein. Mit der Bernoulli-Ungleichung $\forall x \geq -1, n \in \mathbb{N}_0 \colon (1 + x)^n \geq 1 + nx$ erhält man

$$1 - (1 - p)^{kl} \leq 1 - (1 - klp) = klp. \tag{28}$$

Zwischenschritte zu (4.4.28):

$$\sum_{i,j\in[n]} \big(\mathbb{P}_\lambda(|\mathcal{C}(i)| < k, |\mathcal{C}(j)| < k, i \not\longleftrightarrow j) - \big(\mathbb{P}_\lambda(|\mathcal{C}(j)| < k)\big)^2\big) \tag{29}$$

$$= \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{i,j\in[n]} \big(\mathbb{P}_\lambda(|\mathcal{C}(i)| = l, |\mathcal{C}(j)| < k, i \not\longleftrightarrow j) - \mathbb{P}_\lambda(|\mathcal{C}(i)| = l)\,\mathbb{P}_\lambda(|\mathcal{C}(j)| < k)\big) \tag{30}$$

$$\overset{(4.4.24)}{\leq} \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{i,j\in[n]} \mathbb{P}_\lambda(|\mathcal{C}(i)| = l)\big(\mathbb{P}_\lambda\big(|\mathcal{C}(j)| < k \mid |\mathcal{C}(i)| = l, i \not\longleftrightarrow j\big) - \mathbb{P}_\lambda(|\mathcal{C}(j)| < k)\big) \tag{31}$$

$$\overset{(4.4.27)}{\leq} \sum_{l=1}^{k-1} \mathbb{P}_\lambda(|\mathcal{C}(1)| = l) \sum_{i,j\in[n]} kl\lambda/n \tag{32}$$

$$= kn\lambda \sum_{l=1}^{k-1} l\,\mathbb{P}_\lambda(|\mathcal{C}(1)| = l) \tag{33}$$

$$= kn\lambda\,\mathbb{E}[|\mathcal{C}(1)|\mathbf{1}_{\{|\mathcal{C}(1)|<k\}}] = kn\lambda\chi_{<k}(\lambda). \tag{34}$$

Zusammensetzen mit (4.4.21) und (4.4.22):

$$\mathrm{Var}_\lambda(Z_{<k}) \le nk\lambda\chi_{<k}(\lambda) + n\chi_{<k}(\lambda) = n(\lambda k + 1)\chi_{<k}(\lambda). \tag{35}$$

Zu (4.4.31): Auf dem Ereignis $\{|Z_{\ge k} - n\zeta_\lambda| > n^\nu\}$ gilt

$$\begin{aligned}
|Z_{\ge k} - \mathbb{E}_\lambda[Z_{\ge k}]| &= |Z_{\ge k} - n\zeta_\lambda + O(k_n)| && (36)\\
&\ge |Z_{\ge k} - n\zeta_\lambda| + O(k_n) && (37)\\
&\ge n^\nu + O(k_n) && (38)\\
&= \frac{n^\nu}{2} + \frac{n^\nu}{2} + O(k_n) && (39)\\
&= \frac{n^\nu}{2} + n^\nu\Big(\frac{1}{2} + \frac{O(k_n)}{n^\nu}\Big) && (40)\\
&\overset{\star}{\ge} \frac{n^\nu}{2}, && (41)
\end{aligned}$$

wobei $\star$ nur für n genügend groß gilt, genauer, es muss $\frac{1}{2} + \frac{O(k_n)}{n^\nu} \ge 0$ gelten — dass das geht, liegt daran, dass

$$\frac{O(k_n)}{n^\nu} = \frac{O(k_n)}{k_n} \cdot \frac{k_n}{n^\nu} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{42}$$

Das zeigt (4.4.31).

In (4.4.32) wird $\chi_{<k}(\lambda) \le k$ verwendet und

$$\frac{4n^{1-2\nu}(\lambda k_n + 1)k_n}{n^{-\delta}} = \frac{4(\lambda k_n + 1)k_n}{n^{2\nu-1-\delta}} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \tag{43}$$

denn die positive Potenz $2\nu - 1 - \delta$ von n schlägt jede Potenz von $\log n$.

1.3 Schritt 3

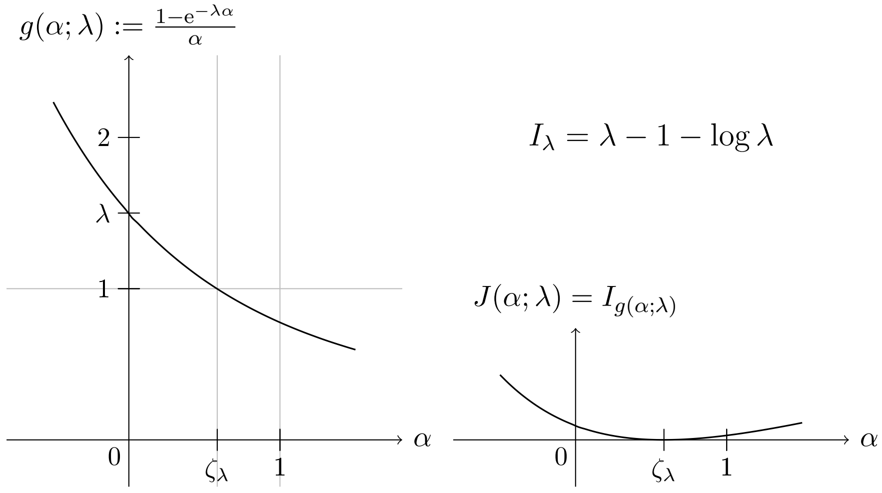
Für die Definitionen in (4.4.33) wiederholen wir die der Aussterbewahrscheinlichkeit

$$\eta_\lambda = \mathrm{e}^{-\lambda(1-\eta_\lambda)} \in (0,1) \tag{44}$$

im Fall $\lambda > 1$ bzw. der Überlebenswahrscheinlichkeit

$$\zeta_\lambda := 1 - \eta_\lambda = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\zeta_\lambda} \in (0,1). \tag{45}$$

In (4.4.33) werden $g(\alpha;\lambda) := \big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\alpha}\big)/\alpha$ und $J(\alpha;\lambda) := I_{g(\alpha;\lambda)}$ definiert:



Die Ableitung von $g(\alpha;\lambda)$ nach α ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} g(\alpha;\lambda) = \frac{\lambda \mathrm{e}^{-\alpha\lambda}\cdot\alpha - (1-\mathrm{e}^{-\alpha\lambda})}{\alpha^2} = \frac{(1+\alpha\lambda)\mathrm{e}^{-\alpha\lambda} - 1}{\alpha^2} \tag{46}$$

$$< \frac{\mathrm{e}^{\alpha\lambda}\mathrm{e}^{-\alpha\lambda} - 1}{\alpha^2} = 0, \tag{47}$$

also ist $\alpha \mapsto g(\alpha;\lambda)$ streng fallend und damit injektiv, und ζ_λ ist die einzige Stelle, an der $g(\zeta_\lambda;\lambda) \overset{(45)}{=} 1$ erfüllt ist. Dass $\zeta_\lambda < 1$ ist, folgt aus $g(1;\lambda) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} < 1$. Mit l'Hospital ist

$$\lim_{\alpha\searrow 0} g(\alpha;\lambda) = \lim_{\alpha\searrow 0} \frac{\lambda \mathrm{e}^{-\alpha\lambda}}{1} = \lambda \tag{48}$$

eignet sich diese Methode nicht zur Bestimmung von ζ_λ, wenn $\lambda \leq 1$. Dann ist aber sowieso $\zeta_\lambda = 0$, denn der Verzweigungsprozess mit ≤ 1 erwarteten Nachkommen stirbt fast sicher aus.

Zur Heuristik im Beweis von Proposition 4.12:

A) In (4.4.37) wird das Verhalten die Erfolgswahrscheinlichkeit der Binomialverteilung bei großen n mit $t = \lfloor \alpha n \rfloor$ geklärt.

B) Damit kann man was über den Erwartungswert von $\mathrm{Bin}(n-1, 1-(1-\lambda/n)^{\lfloor \alpha n \rfloor})$ sagen, nämlich

$$(n-1)\big(1-(1-\lambda/n)^{\lfloor \alpha n \rfloor}\big) \approx n(1-\mathrm{e}^{-\lambda\alpha}). \tag{49}$$

C) Jetzt sieht man, dass das Ereignis $\{S_{\lfloor \alpha n \rfloor} = 0\}$ nach einer großen Abweichung fragt, denn $\alpha < 1 - \mathrm{e}^{-\alpha\lambda}$, also ist αn „linear weit weg" vom Erwartungswert, und die zugehörige Wahrscheinlichkeit ist exponentiell klein.

D) Für kleinere t versagt die Heuristik, deshalb kommt danach die rigorose Rechnung.

Die Heuristik motiviert, warum man sich die Abschätzungen in (4.4.38) leisten kann. Zu den drei Ungleichungen in (4.4.38):

- Der gefragte Wert $t-1$ ist weit unter dem Erwartungswert, also tragen die Werte unter $t-1$ nichts Wesentliches mehr bei. (Das Verhalten kann man bei der Normalverteilung gut beobachten, die Tails der Verteilung werden superexponentiell schnell klein, siehe $\mathrm{e}^{-x^2/2}$. Der zentralen Grenzwertsatz überträgt die Intuition zur Binomialverteilung.)
- Warum gilt die zweite Ungleichung? — „Wir versuchen es einmal öfter, erlauben uns aber auch einen weiteren Treffer."
  Formal: Wir koppeln die beiden Zufallsvariablen: Sei $X \sim \mathrm{Bin}(n-1, q)$, $Y \sim \mathrm{Bin}(1, q)$ und $Z := X + Y$. Dann ist $Z \sim \mathrm{Bin}(n, q)$ und $\{X \leq t-1\} \subseteq \{Z \leq t\}$.
- Wir verkleinern die Erfolgswahrscheinlichkeit, also bekommen wir mit größerer Wahrscheinlichkeit weniger Treffer. Die Heuristik sagt, dass das asymptotische Verhalten nicht beeinträchtigt wird, also verschenken wir bei der Abschätzung nichts, was uns der Grenzwert nicht eh streitig machen würde.

In (4.4.39) beim ersten Gleichheitszeichen wird verwendet, dass die Binomialverteilung als Summe von unabhängigen Indikatorfunktion mit Bernoulli-Verteilung entsteht. Besser lesbar wird es, wenn wir die Zufallsvariablen wieder notieren: Seien $Z_j \sim \mathrm{Bin}(1, q)$ und $X := \sum_{j=1}^n Z_j$. Dann ist $X \sim \mathrm{Bin}(n, q)$ und

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-sX}] = \mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^n \mathrm{e}^{-sZ_j}\Big] = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-sZ_j}] \tag{50}$$

$$= \big(\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-sZ_j}]\big)^n = \big((1-q) + q\mathrm{e}^{-s}]\big)^n. \tag{51}$$

In derselben Gleichung (4.4.39) beim zweiten Ungleichungszeichen wird verwendet, dass für alle $x \geq -1$ gilt

$$(1+x)^n \leq (\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}. \tag{52}$$

Die Bedingung $x \geq -1$ brauchen wir, weil bei geradem n die Funktion $a \mapsto a^n$ nur für $a \geq 0$ monoton wachsend ist. In der letzten Gleichung ist ein Vorzeichenfehler.

Dass s^* aus (4.4.40) tatsächlich der Minimierer ist, müssen wir gar nicht nachrechnen — wir müssen nur wissen, dass wir s^* einsetzen dürfen. Letzteres wird nach (4.4.40) überprüft.

In Gleichung (4.4.42) setzt sich der Vorzeichenfehler aus (4.4.39) fort. Wir verwenden

$$s^* = \log\big((1-\mathrm{e}^{-\lambda t/n})/(t/n)\big) = \log(g(t/n;\lambda)) \tag{53}$$

und $\mathrm{e}^{-s^*} = \frac{t}{n(1-\mathrm{e}^{-\lambda t/n})}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\lambda(S_t = 0) &\overset{(4.4.39)}{\leq} \exp\big(s^*t - n(1-\mathrm{e}^{-\lambda t/n})(1-\mathrm{e}^{-s^*})\big) && (54)\\
&= \exp\Big(s^*t - t\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda t/n}}{t/n} + t\Big) && (55)\\
&= \exp\Big(-t\big(-s^* + g(t/n;\lambda) - 1\big)\Big) && (56)\\
&\overset{(53)}{=} \exp\Big(-t\big(g(t/n;\lambda) - 1 - \log(g(t/n;\lambda))\big)\Big) && (57)\\
&= \mathrm{e}^{-tI_{g(t/n;\lambda)}} = \mathrm{e}^{-tJ(t/n;\lambda)}. && (58)
\end{aligned}$$

Korollar 4.13 schließt nicht aus, dasss es Zusammenhangskomonenten gibt, deren Größe logarithmisch in n wächst.

Im Beweis sollten wir etwas genauer sein und $k_n := \lceil K \log n \rceil$ verwenden. Damit ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\lambda(\exists v \in [n]\colon k_n \leq |\mathcal{C}(v)| \leq \alpha n) &\leq n\,\mathbb{P}_\lambda(k_n \leq |\mathcal{C}(1)| \leq \alpha n) && (59)\\
&\leq Cn\mathrm{e}^{-k_n J(\alpha;\lambda)} && (60)\\
&\leq Cn\mathrm{e}^{-K\log n J(\alpha;\lambda)} && (61)\\
&= Cn\big(\mathrm{e}^{\log n}\big)^{-KJ(\alpha;\lambda)} && (62)\\
&= Cn^{1-KJ(\alpha;\lambda)} && (63)\\
&= Cn^{-\delta}. && (64)
\end{aligned}$$

1.4 Schritt 4

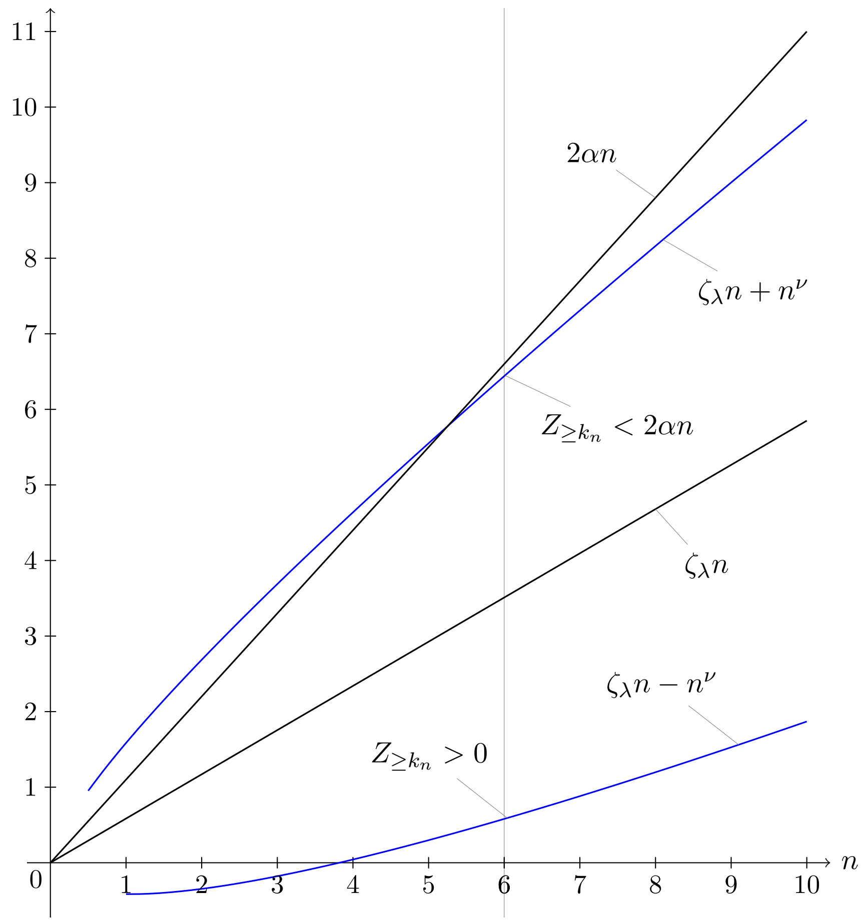
Zu Lemma 4.14:

$$\mathcal{E}_n := \{|Z_{\geq k_n} - n\zeta_\lambda| \leq n^\nu, \forall v \in [n]\colon |\mathcal{C}(v)| \notin [k_n, \alpha n]\} \tag{65}$$

Zur Argumentation, dass $|\mathcal{C}_{\max}| = Z_{\geq k_n}$ auf $\mathcal{E}_n$: Der Widerspruch, der aus $|\mathcal{C}_{\max}| < Z_{\geq k_n}$ folgt, ist

$$\begin{aligned}
&2\alpha n \leq Z_{\geq k_n} \leq \zeta_\lambda n + n^\nu && (66)\\
\implies\ &(2\alpha - \zeta_\lambda)n \leq n^\nu && (67)\\
\implies\ &0 < 2\alpha - \zeta_\lambda \leq n^{\nu-1} \xrightarrow{n\to\infty} 0, && (68)
\end{aligned}$$

siehe Skizze:


11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
n
$2\alpha n$
$\zeta_\lambda n + n^\nu$
$Z_{\geq k_n} < 2\alpha n$
$\zeta_\lambda n$
$\zeta_\lambda n - n^\nu$
$Z_{\geq k_n} > 0$