Zufällige Graphen

Christoph Schumacher

08. Juni 2020

RGCN I, Kap. 6.1, 6.2:
Der Generalized Random Graph

Zusammenfassung

Der Generalized Random Graph

Inhaltsverzeichnis

Fragen

1. Warum ist in (I.1) der Fall $k = n$ nicht nötig? — In der Formulierung in Gleichung (C) aus Sierksma, Hoogeveen (1991) wird die Ungleichung für alle $k \in [n]$ gefordert. Tatsächlich braucht man das auch, hier ist ein Gegenbeispiel: Seien $n = 2$ und $d_1 = d_2 = 2$. Weil es nur zwei einfache Graphen auf zwei Knoten gibt, den mit einer Kante und den ohne Kanten, ist die Folge $(2, 2)$ nicht graphisch. Die Summe ist aber gerade, und die Ungleichung

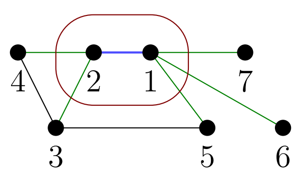
$$\underbrace{d_1}_{=2} \leq \underbrace{1 \cdot (1-1) + d_2}_{=2} \tag{1}$$

ist auch erfüllt. Erst die Gleichung für $k = 2$ schließt die Folge $(2, 2)$ aus:

$$\underbrace{d_1 + d_2}_{=4} \not\leq \underbrace{2 \cdot (2-1) + 0}_{=2}\,. \tag{2}$$

1 Zum Intermezzo

Beispielgraph mit $n = 7$ Knoten mit Gradfolge $(4, 3, 3, 2, 2, 1, 1)$:



Die Ungleichung für $k = 2$ lautet

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = 4 + 3 = 7 \leq 10 = \underbrace{k(k-1)}_{=2} + \underbrace{\textstyle\sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}}_{=2+2+2+1+1=8}. \tag{3}$$

2 Zu Kapitel 6.2

Zu (6.2.1): Größere Gewichte heißt mehr Wahrscheinlichkeit für eine Kante, denn für $a > 0$ ist die Funktion

$$0 \leq x \mapsto \frac{x}{a+x} = \frac{1}{\frac{a}{x} + 1} \tag{4}$$

monoton wachsend.

Der Grad D_i des Knoten $i \in [n]$ ist $D_i = \sum_{j \in [n] \setminus \{i\}} X_{ij}$ mit $X_{ij} = \mathbf{1}_{\{\text{Kante } ij \text{ ist da}\}}$. Der Erwartungswert von D_i ist im Regime $\max_{i,j \in [n]} w_i w_j = o(\ell_n)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[D_i] &= \sum_{j \neq i} \mathbb{E}[X_{ij}] && (5) \\ &= \sum_{j \in [n]} \frac{w_i w_j}{\ell_n + w_i w_j}(1 + o(1)) && (6) \\ &= w_i \sum_{j \in [n]} \frac{w_j}{\ell_n}(1 + o(1)) && (7) \\ &= w_i(1 + o(1)). && (8) \end{aligned}$$

Das Gewicht eines Knoten kann damit als der asymptotisch erwartete Grad des Knoten interpretiert werden. (Nach Theorem 2.10 ist die Verteilung von D_i nahe an einer Poisson-Verteilung, also nähert sich die Verteilung von D_i bei $n \to \infty$ der Verteilung $\text{Poi}(w_i)$. Für Details siehe Theorem 6.7(a).)

Zu **Example 6.3**: Um den Erwartungswert in (6.2.4) auszurechnen, schreibt man den Grad als Summe von Indikatorfunktionen der Kanten, die am Knoten anliegen können:

$$D_i = \sum_{j \in [n]} X_{ij}. \tag{9}$$

Dann bildet man auf beiden Seiten den Erwartungswert:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[D_i] &= \sum_{j \in [n] \setminus \{i\}} \mathbb{E}[X_{ij}] && (10) \\ &= \sum_{j \in [n] \setminus \{i\}} p_{ij} && (11) \\ &= \sum_{j \in [n] \setminus \{i\}} \frac{w_i w_j}{\ell_n + w_i w_j} && (12) \\ &= \begin{cases} (n_1 - 1)\frac{m_1^2}{\ell_n + m_1^2} + n_2 \frac{m_1 m_2}{\ell_n + m_1 m_2} & \text{wenn } w_i = m_1, \\ n_1 \frac{m_1 m_2}{\ell_n + m_1 m_2} + (n_2 - 1)\frac{m_2^2}{\ell_n + m_2^2} & \text{wenn } w_i = m_2. \end{cases} && (13) \end{aligned}$$

Zu (6.2.4):

$$\frac{(n_1 - 1) m_1}{\ell_n + m_1^2} + \frac{n_2 m_2}{\ell_n + m_1 m_2} \tag{14}$$

$$= \frac{(n_1-1)m_1}{\ell_n(1+\frac{m_1^2}{\ell_n})} + \frac{n_2 m_2}{\ell_n(1+\frac{m_1 m_2}{\ell_n})} \tag{15}$$

$$= \frac{(n_1-1)m_1}{\ell_n(1+o(1))} + \frac{n_2 m_2}{\ell_n(1+o(1))} \tag{16}$$

$$= \frac{(n_1-1)m_1}{\ell_n}(1+o(1)) + \frac{n_2 m_2}{\ell_n}(1+o(1)) \tag{17}$$

$$= \frac{n_1 m_1 + n_2 m_2}{\ell_n} - \underbrace{\frac{m_1}{\ell_n}}_{=o(1)} + \underbrace{\frac{(n_1-1)m_1}{\ell_n}}_{=O(1)} o(1) + \underbrace{\frac{n_2 m_2}{\ell_n}}_{=O(1)} o(1) \tag{18}$$

$$= 1 + o(1) \tag{19}$$

Wenn $m_1^2 + m_2^2 = o(\ell_n)$, dann ist auch $m_1^2 + m_1 m_2 = o(\ell_n)$, denn:

$$\frac{m_1^2 + m_1 m_2}{\ell_n} = \frac{m_1^2 + m_1 m_2}{m_1^2 + m_2^2} \cdot \frac{m_1^2 + m_2^2}{\ell_n} \tag{20}$$

$$\overset{m_1 m_2 \leq \frac{1}{2}(m_1^2+m_2^2)}{\leq} \frac{m_1^2 + \frac{1}{2}(m_1^2+m_2^2)}{m_1^2+m_2^2} \cdot \frac{m_1^2+m_2^2}{\ell_n} \tag{21}$$

$$\overset{0 \leq m_2^2}{\leq} \frac{3}{2} \frac{m_1^2 + m_2^2}{\ell_n} \longrightarrow 0. \tag{22}$$

Die erste Ungleichung folgt aus $0 \leq (m_1 - m_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2$.

Wie erreicht man $m_1^2 + m_2^2 = o(\ell_n)$? — Auf jeden Fall braucht man $n_1 \to \infty$ oder $n_2 \to \infty$, oder beides. Man kann $m_1 = m_1(n)$ und $m_2 = m_2(n)$ auch mit n variieren, aber wenn man da nicht aufpasst, dann kann man $m_1^2 + m_2^2 = o(\ell_n)$ auch wieder kaputtmachen, z. B. mit $m_1 = n_1$ und $m_2 = n_2$, dann ist nämlich

$$\frac{m_1^2 + m_2^2}{\ell_n} = \frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1^2 + n_2^2} = 1 \neq o(1). \tag{23}$$

Was wir eigentlich möchten, ist, dass $m_1(n)$ und $m_2(n)$ für $n \to \infty$ konvergieren, so dass der Grenzwert der asymptotische Grad von Knoten vom Typ 1 bzw. Typ 2 ist. Wenn das der Fall ist, dann ist $m_1^2 + m_2^2 = o(\ell_n)$ erfüllt, denn dann ist $m_1^2 + m_2^2$ beschränkt und ℓ_n nicht.

Zu Condition 6.4(a): Die Bedingung (6.2.6): $W_n \xrightarrow{d} W$ hat beispielsweise folgende Konsequenz. Der Darstellungssatz von Skorohod besagt, dass es eine Kopplung $((\widehat{W}_n)_n, \widehat{W})$ von W_n, $n \in \mathbb{N}$, und W mit

$$\widehat{W}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f. s.}} \widehat{W} \tag{24}$$

gibt.

Beweis. In diesem Setting kann man die Kopplung folgendermaßen konstruieren. Sei $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ uniform verteilt auf $(0,1)$ und F_n bzw. F die Verteilungsfunktionen von W_n bzw. W. Setze

$$\widehat{W}_n := F_n^{-1}(U) \quad \text{und} \quad \widehat{W} := F^{-1}(U) \tag{25}$$

mit der Quantiltransformation $F^{-1}(u) := \inf\{x \in \mathbb{R} \mid u \leq F(x)\}$. Dann haben W und $\widehat{W}$ sowie W_n und $\widehat{W}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ jeweils dieselbe Verteilung. Wir zeigen nun (24). Dabei verwenden wir folgenden Fakt für Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$:

$$A \subseteq B \implies \inf A \geq \inf B. \tag{26}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Die schwache Konvergenz der Verteilungsfunktionen (Konvergenz in allen Stetigkeitspunkten des Limes) wird vom *Lévy-Abstand*

$$d_{\mathrm{L}}(F,G) := \inf\{\varepsilon > 0 \colon F(x-\varepsilon) - \varepsilon \leq G(x) \leq F(x+\varepsilon) + \varepsilon\} \tag{27}$$

metrisiert. Das heißt: $\exists N \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq N, x \in \mathbb{R} \colon$

$$F(x-\varepsilon) - \varepsilon \leq F_n(x) \leq F(x+\varepsilon) + \varepsilon. \tag{28}$$

Für $u \in (0,1)$ und $n \geq N$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
F_n^{-1}(u) &= \inf\{x \in \mathbb{R} \colon u \leq F_n(x)\} && (29)\\
&\overset{(26),(28)}{\geq} \inf\{x \in \mathbb{R} \colon u \leq F(x+\varepsilon) + \varepsilon\} && (30)\\
&\overset{\tilde{x}:=x+\varepsilon}{=} \inf\{\tilde{x} \in \mathbb{R} \colon u - \varepsilon \leq F(\tilde{x})\} - \varepsilon && (31)\\
&= F^{-1}(u-\varepsilon) - \varepsilon && (32)
\end{aligned}$$

In der anderen Richtung ist

$$\begin{aligned}
F_n^{-1}(u) &= \inf\{x \in \mathbb{R} \colon u \leq F_n(x)\} && (33)\\
&\overset{(26),(28)}{\leq} \inf\{x \in \mathbb{R} \colon u \leq F(x-\varepsilon) - \varepsilon\} && (34)\\
&\overset{\tilde{x}:=x-\varepsilon}{=} \inf\{\tilde{x} \in \mathbb{R} \colon u + \varepsilon \leq F(\tilde{x})\} + \varepsilon && (35)\\
&= F^{-1}(u+\varepsilon) + \varepsilon. && (36)
\end{aligned}$$

Wir schließen für alle $\varepsilon > 0$

$$F^{-1}(u-\varepsilon) - \varepsilon \leq \liminf_{n\to\infty} F_n^{-1}(u) \leq \limsup_{n\to\infty} F_n^{-1}(u) \leq F^{-1}(u+\varepsilon) + \varepsilon. \tag{37}$$

Durch den Grenzübergang $\varepsilon \searrow 0$ erhalten wir

$$F^{-1}(u^-) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n^{-1}(u) \leq \limsup_{n\to\infty} F_n^{-1}(u) \leq F^{-1}(u^+). \tag{38}$$

Für alle Stetigkeitsstellen u von F^{-1} gilt also $\lim_{n\to\infty} F_n^{-1}(u) = F^{-1}(u)$. An den Unstetigkeitsstellen von F^{-1} muss der Limes nicht existieren, zum Beispiel passiert das bei $W_n \sim \mathrm{Bin}(1, \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2n})$. Aber F^{-1} ist eine monoton wachsende Funktion, denn für $0 < t \leq u < 1$ ist

$$F^{-1}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} \colon t \leq F(x)\} \overset{(26)}{\leq} \inf\{x \in \mathbb{R} \colon u \leq F(x)\} = F^{-1}(u). \tag{39}$$

Also gibt es höchstens abzählbar viele Sprungstellen $u \in (0,1)$, an denen $F^{-1}(u^-) < F^{-1}(u^+)$ gilt (an jeder Sprungstelle überspringt der Funktionswert eine andere rationale Zahl). Da die auf $(0,1)$ uniform verteilte ZV U diese Sprungstellen fast sicher nicht trifft, haben wir (24) gezeigt. □

Aufgabe 6.3: Beh.: Die Bedingungen 6.4(a)–(b) implizieren $\max_{i\in[n]} w_i = o(n)$, die Bedingungen 6.4(a)–(c) implizieren $\max_{i\in[n]} w_i = o(\sqrt{n})$.

Beweis. Wir nehmen an, dass $\max_{i\in[n]} w_i \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, ansonsten ist nämlich nichts zu zeigen. Es sei $\alpha \in \{1,2\}$ und $K \in \mathbb{R}$. Damit rechnen wir:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \max_{i\in[n]} w_i^\alpha \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i\in[n]} w_i^\alpha \mathbf{1}_{\{w_i \geq K\}} \tag{40}$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[W_n^\alpha \mathbf{1}_{\{W_n \geq K\}}] \tag{41}$$
$$= \limsup_{n\to\infty} \big(\mathbb{E}[W_n^\alpha] - \mathbb{E}[W_n^\alpha \mathbf{1}_{\{W_n < K\}}]\big) \tag{42}$$

Nach Bedingung 6.4(b) bzw. Bedingung 6.4(c) ist $\lim \mathbb{E}[W_n^\alpha] = \mathbb{E}[W^\alpha]$. Wegen Bedingung 6.4(a) gibt es die Kopplung $((\widehat{W}_n)_n, \widehat{W})$ von W_n, $n \in \mathbb{N}$ und W, die $\widehat{W}_n \to W$ fast sicher erfüllt. Mit dem Lemma von Fatou folgt

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[W_n^\alpha \mathbf{1}_{\{W_n < K\}}] = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[\widehat{W}_n^\alpha \mathbf{1}_{\{\widehat{W}_n < K\}}] \tag{43}$$
$$\geq \mathbb{E}[\widehat{W}^\alpha \mathbf{1}_{\{\widehat{W} < K\}}] = \mathbb{E}[W^\alpha \mathbf{1}_{\{W < K\}}]. \tag{44}$$

Mit $\mathbb{E}[W^\alpha] < \infty$ und monotoner Konvergenz folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \max_{i\in[n]} w_i^\alpha \leq \mathbb{E}[W^\alpha] - \mathbb{E}[W^\alpha \mathbf{1}_{\{W<K\}}] \xrightarrow{K\to\infty} 0. \tag{45}$$

Daraus schließen wir

$$\frac{\max_{i\in[n]} w_i}{n^{1/\alpha}} = \left(\frac{\max_{i\in[n]} w_i^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{46}$$

□

Was ist $\mathbb{P}_n$ in Remark 6.5? — Die Knotengewichte w_i, $i \in [n]$, sind jetzt selbst zufällig. Wir wollen trotzdem für jede Realisierung der Knotengewichte mit ihnen rechnen, und das geht, indem man auf die Knotengewichte bedingt:

$$\mathbb{P}_n := \mathbb{P}(\,\cdot \mid (w_i)_{i\in[n]}) \tag{47}$$

Die Verteilung des Generalized Random Graph GRG_n auf n Knoten mit zufälligen Knotengewichten wird einem zweistufigen Verfahren definiert.

1. Als erstes wählt man zufällig die Gewichte $\mathbf{w} = (w_i)_{i\in[n]}$, zum Beispiel aber nicht notwendigerweise unabhängig und identisch verteilt.
2. Mit Hilfe dieser Gewichte definiert man dann die Kantenwahrscheinlichkeiten für den Graphen.

Das lässt sich so fassen:

$$\mathbb{P}(\mathrm{GRG}_n \in A) = \mathbb{E}\big[\mathbb{P}(\mathrm{GRG}_n \in A \mid \mathbf{w})\big] \tag{48}$$
$$= \mathbb{E}\big[\mathbb{P}_n(\mathrm{GRG}_n(\mathbf{w}) \in A)\big] \tag{49}$$

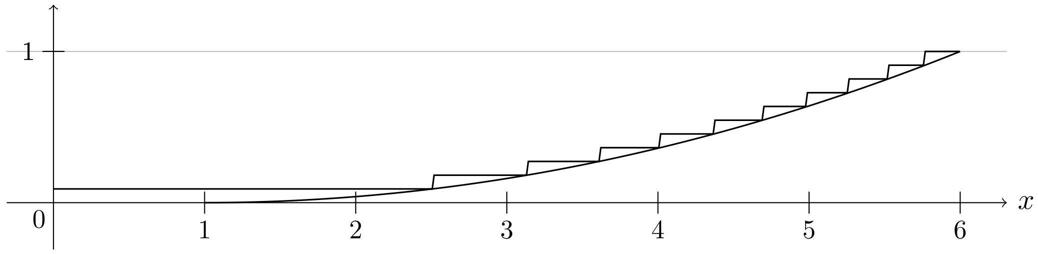
Die Verteilung der Kantengewichte $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(n)}$ kann von n abhängen, muss aber die Bedingung 6.4(a)–(b) erfüllen: Für alle Stetigkeitspunkte x von F gilt

$$F_n(x) = \mathbb{P}_n(W_n \leq x) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{P}(W \leq x) = F(x) \quad \text{und} \quad \mathbb{E}_n[W_n] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}[W]. \tag{50}$$

Dabei sind $F_n(x)$ und $\mathbb{E}_n[W_n]$ $\sigma(\mathbf{w}^{(n)})$-messbare ZVn, während $F(x)$ und $\mathbb{E}[W]$ deterministisch sind. Damit (50) sinnvoll ist, muss die ganze Folge $(\mathrm{GRG}_n)_n$ auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum definiert sein. Zur gemeinsamen Verteilung der Folgenglieder gibt es nur die Information aus (50), da ist noch Freiraum für Kopplungen.

TODO: Aufgabe 6.3 für zufällig gewählte Knotengrade

Zu (6.2.14) bzw. (6.2.17):



Die Knotengewichte sind absteigend geordnet: $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n = 0$. (Ja, entgegen der Ansage bekommt der Knoten n das Gewicht $w_n = 0$.)

Zu (6.2.18): Verwendet Theorem 2.15 oder direkt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i\in[n]} h(w_i) &= \frac{1}{n}\sum_{i\in[n]} h([1-F]^{-1}(\tfrac{i}{n})) && (51)\\
&= \int_0^1 h\Big(\underbrace{[1-F]^{-1}\Big(\underbrace{\frac{\lceil ny\rceil}{n}}_{\geq y}\Big)}_{\leq [1-F]^{-1}(y)}\Big)\,\mathrm{d}y && (52)\\
&\leq \int_0^1 h\big([1-F]^{-1}(y)\big)\,\mathrm{d}y && (53)\\
&= \mathbb{E}[h([1-F]^{-1}(U))] && (54)\\
&= \mathbb{E}[h(W)], && (55)
\end{aligned}$$

wobei $U \sim \mathcal{U}((0,1))$ und $W := [1-F]^{-1}(U) \sim F$.

3 Zum Beweis von Theorem 6.6

Zu (6.2.29): (Notation: $a \wedge b := \min\{a,b\}$ für $a, b \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{i\in[n]} \frac{(w_i \wedge a_n)^2}{\ell_n} = \frac{1}{\ell_n}\sum_{i\in[n]} \underbrace{(w_i \wedge a_n)}_{\leq w_i}\underbrace{(w_i \wedge a_n)}_{\leq a_n} \leq \frac{1}{\ell_n}\underbrace{\sum_{i\in[n]} w_i}_{=\ell_n} a_n = a_n. \qquad (56)$$

Warum genügen $\ell_n/n, \ell_n(a)^2/(n\ell_n) \to \mathbb{E}[W]$, um aus (6.2.26) und (6.2.28) die Aussage (6.2.24) zu folgern?

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}[E(\mathrm{GRG}_n(\mathbf{w}))]}{n} \overset{(6.2.26)}{\leq} \frac{1}{2}\limsup_{n\to\infty}\frac{\ell_n}{n} \overset{\text{z. z.}}{=} \frac{1}{2}\mathbb{E}[W] \qquad (57)$$

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}[E(\mathrm{GRG}_n(\mathbf{w}))]}{n} &\overset{(6.2.28)}{\geq} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\Big(\frac{(\ell_n(a_n))^2}{\ell_n} - a_n(1+a_n)\Big)\\
&\overset{a_n = o(\sqrt{n})}{=} \frac{1}{2}\liminf_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\ell_n(a_n)}{n}}_{\xrightarrow{\text{z. z.}}\mathbb{E}[W]}\underbrace{\frac{\ell_n(a_n)}{\ell_n}}_{\xrightarrow{\text{z. z.}}1} \overset{\text{z. z.}}{=} \frac{1}{2}\mathbb{E}[W] \qquad (58)
\end{aligned}$$

Warum gilt $\mathbb{E}[W_n \wedge K] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}[W \wedge K]$? — Die Hinweise sind $W_n \xrightarrow{d} W$ und majorisierte Konvergenz. Wir verwenden die Kopplung $((\widehat{W}_n)_n, \widehat{W})$ von W_n, $n \in \mathbb{N}$, und W mit $\widehat{W}_n \xrightarrow{\text{f. s.}} W$ und den Satz von der majorisierten Konvergenz:

$$\mathbb{E}[W_n \wedge K] = \mathbb{E}[\widehat{W}_n \wedge K] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}[\widehat{W} \wedge K] = \mathbb{E}[W \wedge K]. \qquad (59)$$

Die integrierbare Majorante ist K.

(Warum wird der Satz von der majorisierten Konvergenz nicht immer und überall mit der schwachen Voraussetzung formuliert? — Man will normalerweise nicht nur auf Konvergenz der Erwartungswerte schließen sondern auch auf Konvergenz in L^1, und die kann man unter der schwachen Voraussetzung nicht mehr erreichen. Man findet übrigens Versionen mit Konvergenz in Wahrscheinlichkeit als Voraussetzung, zum Beispiel im Buch Wahrscheinlichkeitstheorie von A. Klenke.)

Warum gilt $\ell_n(a_n)/\ell_n \to 1$? — Das kann man genauso einsehen wie $\ell_n(a_n)/n \to \mathbb{E}[W]$. Auf der einen Seite haben wir

$$\frac{\ell_n(a_n)}{\ell_n} \le \frac{\ell_n}{\ell_n} = 1. \tag{60}$$

Auf der anderen Seite ist für alle $K > 0$

$$\frac{\ell_n(a_n)}{\ell_n} \ge \frac{\ell_n(K)/n}{\ell_n/n} = \frac{\mathbb{E}[W_n \wedge K]}{\mathbb{E}[W_n]} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}[W \wedge K]}{\mathbb{E}[W]} \xrightarrow{K\to\infty} \frac{\mathbb{E}[W]}{\mathbb{E}[W]} = 1. \tag{61}$$

Zu (6.2.31): Wir schreiben der Kürze wegen $X_n := E(\mathrm{GRG}_n(\mathbf{w}))$. Für alle $\varepsilon > 0$ haben wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]} - 1\Big| \ge \varepsilon\Big) &= \mathbb{P}\big(|X_n - \mathbb{E}[X_n]| \ge \varepsilon\, \mathbb{E}[X_n]\big) && (62)\\
&\le \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{\varepsilon^2(\mathbb{E}[X_n])^2} && (63)\\
&\le \frac{\mathbb{E}(X_n)}{\varepsilon^2(\mathbb{E}[X_n])^2} && (64)\\
&= \frac{1}{\varepsilon^2\, \mathbb{E}[X_n]} \xrightarrow{n\to\infty} 0, && (65)
\end{aligned}$$

denn nach (6.2.24) ist $\lim \frac{1}{n}\, \mathbb{E}[X_n] = \frac{1}{2}\, \mathbb{E}[W] > 0$.

Warum sind wir jetzt fertig? — $a_n \to a, X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} x \implies a_n X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} ax$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{X_n}{n} - \frac{\mathbb{E}[W]}{2}\Big| \ge \varepsilon\Big) && (66)\\
&= \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]}\frac{\mathbb{E}[X_n]}{n} - \frac{\mathbb{E}[W]}{2}\Big| \ge \varepsilon\Big) && (67)\\
&= \mathbb{P}\Big(\Big|\Big(\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]} - 1\Big)\frac{\mathbb{E}[X_n]}{n} + \frac{\mathbb{E}[X_n]}{n} - \frac{\mathbb{E}[W]}{2}\Big| \ge \varepsilon\Big) && (68)\\
&\le \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]} - 1\Big|\frac{\mathbb{E}[X_n]}{n} + \underbrace{\Big|\frac{\mathbb{E}[X_n]}{n} - \frac{\mathbb{E}[W]}{2}\Big|}_{\le\varepsilon/2 \text{ für große } n} \ge \varepsilon\Big) && (69)\\
&\le \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]} - 1\Big|C + \frac{\varepsilon}{2} \ge \varepsilon\Big) && (70)\\
&= \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]} - 1\Big| \ge \frac{\varepsilon}{2C}\Big) \xrightarrow{n\to\infty} 0 && (71)
\end{aligned}$$

mit $C := \max_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathbb{E}[X_n]}{n} < \infty$, da $\big(\frac{\mathbb{E}[X_n]}{n}\big)_n$ konvergiert. Das funktioniert natürlich nur bei $\mathbb{E}[W] < \infty$.

Im Fall $\mathbb{E}[W] = \infty$ argumentieren wir wie folgt. Für alle $K > 0$ rechnen wir

$$\mathbb{P}\Big(\frac{X_n}{n} \le K\Big) = \mathbb{P}\Big(\frac{X_n}{n} \le K \;\Big|\; \frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]} \le \frac{1}{2}\Big)\, \mathbb{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]} \le \frac{1}{2}\Big) \tag{72}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \mathbb{P}\Big(\frac{X_n}{n} \le K \;\Big|\; \frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]} > \frac{1}{2}\Big)\, \mathbb{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]} > \frac{1}{2}\Big) && (73)\\
&\le \mathbb{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]} \le \frac{1}{2}\Big) + \mathbb{P}\Big(\frac{X_n}{n} \le K \;\Big|\; \frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]} > \frac{1}{2}\Big) && (74)\\
&\le \mathbb{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]} - 1 \le -\frac{1}{2}\Big) + \mathbb{P}\Big(\frac{\mathbb{E}[X_n]}{2n} \le K \;\Big|\; \frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]} > \frac{1}{2}\Big) && (75)\\
&\le \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]} - 1\Big| \ge \frac{1}{2}\Big) + \mathbb{P}\Big(\frac{\mathbb{E}[X_n]}{2n} \le K\Big) \xrightarrow{n\to\infty} 0. && (76)
\end{aligned}
$$

TODO: Kann man Theorem 6.6 auch für zufällige Knotengrade beweisen?