Zufällige Graphen

Christoph Schumacher

15. Juni 2020

RGCN I, Kap. 6.3, 6.4:
Knotengrade und Statistik der Knotengrade im Generalized Random Graph

Zusammenfassung

- Der Grad des Knoten mit Gewicht w ist asymptotisch $\mathrm{Poi}(w)$-verteilt.
- Endlich viele Knotengrade sind asymptotisch unabhängig.
- Ein zufällig gewählter Knoten ist asymptotisch mixed-Poisson-verteilt.
- Die empirische Verteilung der Knotengrade konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen eine Mixed Poisson-Verteilung.

Inhaltsverzeichnis

Fragen

1. Was bedeutet asymptotisch unabhängig? — Im Buch sind $D_1, \dots, D_m$ asymptotisch unabhängig, sobald es eine Kopplung $\big((D_i)_{i\in[m]}, (\widehat{D}_i)_{i\in[m]}\big)$ gibt, für die $\widehat{D}_i$, $i \in [m]$, unabhängig sind und $\mathbb{P}\big((D_i)_{i\in[m]} \neq (\widehat{D}_i)_{i\in[m]}\big) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ erfüllt ist. Das impliziert für beschränkte Funktionen $f_i\colon N_0 \to \mathbb{R}$, $i \in [m]$:

$$
\begin{aligned}
&\Big|\mathbb{E}\Big[\prod\nolimits_{i\in[m]} f_i(D_i)\Big] - \prod\nolimits_{i\in[m]} \mathbb{E}\big[f_i(D_i)\big]\Big| && (1)\\
&= \Big|\mathbb{E}\Big[\prod\nolimits_{i\in[m]} f_i(D_i)\Big] - \prod\nolimits_{i\in[m]} \mathbb{E}\big[f_i(\widehat{D}_i)\big]\Big| && (2)\\
&= \Big|\mathbb{E}\Big[\prod\nolimits_{i\in[m]} f_i(D_i) - \prod\nolimits_{i\in[m]} f_i(\widehat{D}_i)\Big]\Big| && (3)\\
&= \Big|\Big(\mathbb{E}\Big[\prod\nolimits_{i\in[m]} f_i(D_i) - \prod\nolimits_{i\in[m]} f_i(\widehat{D}_i)\Big)\mathbf{1}_{\{(D_i)_{i\in[m]}\neq(\widehat{D}_i)_{i\in[m]}\}}\Big]\Big| && (4)\\
&\leq 2\,\mathbb{P}\big((D_i)_{i\in[m]} \neq (\widehat{D}_i)_{i\in[m]}\big) \prod\nolimits_{i\in[m]} \|f_i\|_\infty && (5)\\
&\xrightarrow{n\to\infty} 0. && (6)
\end{aligned}
$$

2. Im Anhang A wird erklärt: Die Familie der Verteilungen von W_n, $n \in \mathbb{N}$, ist unter den Bedingungen 6.4(a)–(b) gleichgradig integrierbar.

1 Grade im GRG

Was bedeutet Theorem 6.7(a)? — Theorem 2.9 stellt einen wichtigen Zusammenhang her: Der Totalvariationsabstand der Verteilung des Grades D_i des Knoten i und der Poisson-Verteilung mit Parameter w_i wird beschränkt durch

$$d_{\mathrm{TV}}\big(\mathbb{P}_{D_i}, \mathrm{Poi}(w_i)\big) \leq \mathbb{P}(\widehat{D}_i \neq \widehat{Z}_i). \tag{7}$$

Insbesondere wenn Bedingungen 6.4(a)–(c) erfüllt sind, ist nach Aufgabe 6.3 $w_i = o(n)$, und wir erhalten

$$\frac{w_i^2}{\ell_n}\Big(1 + 2\frac{\mathbb{E}[W_n^2]}{\mathbb{E}[W_n]}\Big) = \Big(\frac{w_i}{\sqrt{n}}\Big)^2 \frac{1}{\ell_n/n}\Big(1 + 2\frac{\mathbb{E}[W_n^2]}{\mathbb{E}[W_n]}\Big) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \tag{8}$$

vgl. Korollar 6.9. Insbesondere ist dann

$$\big|\mathbb{E}[D_i] - w_i\big| \leq \mathbb{E}[\big|\widehat{D}_i - \widehat{Z}_i\big|] = \mathbb{E}[\big|\widehat{D}_i - \widehat{Z}_i\big|\mathbf{1}_{\widehat{D}_i \neq \widehat{Z}_i}] \xrightarrow[n\to\infty]{\text{maj. Konv.}} 0, \tag{9}$$

wobei eine mögliche Majorante $\max\{\widehat{D}_i, \widehat{Z}_i\}$ ist.

—

Die Bedingung $\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq i<j\leq m} p_{ij} = 0$ in Theorem 6.7(b) ist notwendig, denn für $m = 2$ ist

$$\mathrm{Cov}(D_1, D_2) = \sum_{i,j\in[n]} \mathrm{Cov}(X_{1i}, X_{2j}) = \mathrm{Var}(X_{12}) = p_{12}(1 - p_{12}). \tag{10}$$

Wenn $\limsup_{n\to\infty} p_{12}(1 - p_{12}) > 0$, dann ist auch $\limsup_{n\to\infty} \mathrm{Cov}(D_1, D_2) > 0$, und dann sind D_1 und D_2 nicht asymptotisch unabhängig.

—

Zu Definition 6.8: Die Mixed-Poisson-Verteilung $\mathrm{Poi}(W)$ ist eine Poisson-Verteilung mit zufälligem Parameter $W \sim F$: Die ZV X ist *mixed Poisson-verteilt mit mixing distribution* F, wenn sie, gegeben W, $\mathrm{Poi}(W)$-verteilt ist: $\forall k \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathbb{P}(X = k \mid W) = \mathrm{e}^{-W}\frac{W^k}{k!}. \tag{11}$$

Definition 6.8 ergibt sich daraus mit Hilfe der Turmeigenschaft:

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}\big[\mathbb{P}(X = k \mid W)\big] = \mathbb{E}\Big[\mathrm{e}^{-W}\frac{W^k}{k!}\Big]. \tag{12}$$

—

Intuition zu (6.3.13): Es werden alle „schon verbrauchten“ X_{ij} durch unabhängige Kopien ersetzt.

—

Die Argumentation, die zu (6.3.14) führt, kann man nochmal in Formeln aufschreiben, um sie zu verdeutlichen:

$$\begin{aligned}
\{(D_i)_{i\in[m]} \neq (\widehat{D}_i)_{i\in[m]}\} &\subseteq \{\exists i \neq j \in [m]\colon X_{ij} \neq \widehat{X}_{ij}\} && (13)\\
&\subseteq \{\exists i \neq j \in [m]\colon X_{ij} = 1 \text{ oder } \widehat{X}_{ij} = 1\} && (14)\\
&= \bigcup_{i\neq j\in[m]} \big(\{X_{ij} = 1\} \cup \{\widehat{X}_{ij} = 1\}\big). && (15)
\end{aligned}$$

1.1 Beweis von Korollar 6.9

1.1.1 Teil (a)

Im Beweis von Korollar 6.9: Wir wollen einsehen, dass die mixed Poisson-Verteilung mit mixing distribution F_n bei $F_n \to F$ gegen die mixed Poisson:=Verteilung mit mixing distribution F konvergiert, und zwar in Verteilung. Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt nach dem Portmanteau-Theorem für die stetige und beschränkte Funktion $f_k\colon 0 \le x \mapsto x^k \mathrm{e}^{-x}/k!$:

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{E}[f_k(X_n)] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}[f_k(X)] = \mathbb{P}(X = k). \tag{16}$$

Damit folgt sofort für alle $x \ge 0$, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \le x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \le x). \tag{17}$$

—

Aus $a_n \to \infty$ folgt $W_n \le a_n$ mit großer Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbb{P}(W_n \le a_n) \ge 1 - \mathbb{P}(W_n \ge a_n) \ge 1 - \frac{\mathbb{E}[W_n]}{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1. \tag{18}$$

—

Zum letzten Schritt in (6.3.16): Für alle $K > 0$ und n groß genug:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[W_n \mathbf{1}_{\{W_n > a_n\}}] &= \limsup_{n\to\infty} \big(\mathbb{E}[W_n] - \mathbb{E}[W_n \mathbf{1}_{\{W_n \le a_n\}}]\big) & (19)\\
&\le \mathbb{E}[W] - \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[W_n \mathbf{1}_{\{W_n < K\}}] & (20)\\
&\le \mathbb{E}[W] - \mathbb{E}[W \mathbf{1}_{\{W < K\}}] & (21)\\
&= \mathbb{E}[W \mathbf{1}_{\{W \ge K\}}] \xrightarrow{K\to\infty} 0, & (22)
\end{aligned}$$

Der $\liminf$ wird mit dem Portmanteau-Theorem ausgeführt, das (unter vielem anderen) besagt: $W_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} W$ ist äquivalent dazu, dass für alle unterhalbstetige und von unten beschränkte Funktionen (wie $f\colon x \mapsto x\mathbf{1}_{(-\infty,K)}(x)$)

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(W_n)] \ge \mathbb{E}[f(W)] \tag{23}$$

erfüllt ist. Der Limes $K \to \infty$ wird mit der Majorante W gerechtfertigt.

—

Konsequenz aus (6.3.16): Mit großer Wahrscheinlichkeit ist $D_U^{(2)} = 0$:

$$\mathbb{P}(D_U^{(2)} = 0) = 1 - \mathbb{P}(D_U^{(2)} \ge 1) \ge 1 - \mathbb{E}[D_U^{(2)}] \xrightarrow{(6.3.16)} 1. \tag{24}$$

—

Aufgabe 6.14: Wir verwenden eine Folge $a_n \to \infty$ mit $a_n = o(n^{1/3})$, folgen dem Beweis von Theorem 6.7(a) und verwenden mehrfach (6.2.29). Wir nutzen die Abkürzung $I_n := \mathbf{1}_{(-\infty,a_n]}$ und sehen

$$D_U^{(1)} = \sum_{j \in [n] \setminus \{U\}} X_{Uj}, \tag{25}$$

wobei, bedingt auf U, die ZVn X_{Uj} unabhängig und $X_{Uj} \sim \mathrm{Bin}(1, p_{Uj})$ mit

$$p_{Uj} = \frac{w_U w_j}{\ell_n + w_U w_j} I_n(w_j) \tag{26}$$

gewählt sind. Nach Theorem 2.10 gibt es eine ZV $\hat{Y}_U$, die bedingt auf U Poisson-verteilt mit Parameter

$$\lambda_U := \sum_{j\in[n]\setminus\{U\}} p_{Uj} \tag{27}$$

$$= \sum_{j\in[n]\setminus\{U\}} \frac{w_U w_j}{\ell_n + w_U w_j} I_n(w_j) \tag{28}$$

$$\leq \sum_{j\in[n]\setminus\{U\}} \frac{w_U w_j}{\ell_n} \leq w_U \tag{29}$$

ist, und weiter gibt es eine ZV $\hat{D}_U^{(1)} \stackrel{d}{=} D_U^{(1)}$ so dass

$$\mathbb{P}(\hat{D}_U^{(1)} \neq \hat{Y}_U \mid U) \leq \sum_{j\in[n]\setminus\{U\}} p_{Uj}^2 \tag{30}$$

$$= \sum_{j\in[n]\setminus\{U\}} \frac{w_U^2 w_j^2}{(\ell_n + w_U w_j)^2} I_n(w_j) \tag{31}$$

$$\leq w_U^2 \sum_{j\in[n]} \frac{w_j a_n}{\ell_n^2} \tag{32}$$

$$= \frac{w_U^2}{\ell_n} a_n. \tag{33}$$

Sei nun $\varepsilon_U := w_U - \lambda_U$. Bedingt auf U sei $\hat{V}_U \sim \mathrm{Poi}(\varepsilon_U)$ unabhängig von $\hat{D}_U^{(1)}$ und $\hat{Y}_U$. Damit definieren wir die „Zielvariable“ $\hat{Z}_U := \hat{Y}_U + \hat{V}_U$. Die Verteilung von $\hat{Z}_U$ ist nach Konstruktion

$$\hat{Z}_U \sim \mathrm{Poi}(\lambda_U + \varepsilon_U) = \mathrm{Poi}(w_U) = \mathrm{Poi}(W_n) \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{Poi}(W), \tag{34}$$

denn $w_U = W_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} W$. Obendrein erhalten wir

$$\mathbb{P}(\hat{Y}_U \neq \hat{Z}_U \mid U) = \mathbb{P}(\hat{V}_U \neq 0 \mid U) = \mathbb{P}(\hat{V}_U \geq 1 \mid U) \leq \mathbb{E}[\hat{V}_U \mid U] = \varepsilon_U. \tag{35}$$

Wir setzen $\ell_n(a_n) := \sum_{j\in[n]} w_j I_n(w_j)$ und berechnen

$$\varepsilon_U = w_U - \sum_{j\in[n]\setminus\{U\}} \frac{w_U w_j}{\ell_n + w_U w_j} I_n(w_j) \tag{36}$$

$$\leq \frac{w_U^2}{\ell_n + w_U^2} + \sum_{j\in[n]} w_U w_j I_n(w_j) \Big(\frac{1}{\ell_n(a_n)} - \frac{1}{\ell_n + w_U w_j} \Big) \tag{37}$$

$$= \frac{w_U^2}{\ell_n + w_U^2} + \sum_{j\in[n]} w_U w_j I_n(w_j) \frac{\ell_n + w_U w_j - \ell_n(a_n)}{\ell_n(a_n)(\ell_n + w_U w_j)} \tag{38}$$

$$\leq \frac{w_U^2}{\ell_n} + \sum_{j\in[n]} w_U w_j I_n(w_j) \frac{w_U a_n + \ell_n - \ell_n(a_n)}{\ell_n(a_n)\ell_n} \tag{39}$$

$$= \frac{w_U^2}{\ell_n} + \frac{w_U^2 a_n}{\ell_n} + w_U \frac{\ell_n - \ell_n(a_n)}{\ell_n}. \tag{40}$$

Zusammengesetzt bedeutet das:

$$\mathbb{P}(\hat{D}_U^{(1)} \neq \hat{Z}_U \mid U) \leq \mathbb{P}(\hat{D}_U^{(1)} \neq \hat{Y}_U \mid U) + \mathbb{P}(\hat{Y}_U \neq \hat{Z}_U \mid U) \tag{41}$$

$$\leq \frac{w_U^2}{\ell_n} a_n + \frac{w_U^2}{\ell_n} + \frac{w_U^2 a_n}{\ell_n} + w_U \frac{\ell_n - \ell_n(a_n)}{\ell_n} \tag{42}$$

$$= \frac{(2a_n+1)w_U^2}{n\,\mathbb{E}[W_n]} + \frac{W_n}{\mathbb{E}[W_n]}\,\mathbb{E}[W_n \mathbf{1}_{\{W_n > a_n\}}], \tag{43}$$

Jetzt integrieren über U und bringen wir das Ereignis $\mathcal{E}_n := \{w_U \le a_n, D_U^{(2)} = 0\}$ ins Spiel:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\hat{D}_U \neq \hat{Z}_U) &= \mathbb{E}\big[\mathbb{P}(\hat{D}_U^{(1)} \neq \hat{Z}_U \mid U)\big] && (44)\\
&\le \mathbb{E}\big[\mathbb{P}(\hat{D}_U^{(1)} \neq \hat{Z}_U \mid U)\mathbf{1}_{\mathcal{E}_n}\big] + \mathbb{P}(\mathcal{E}_n^c) && (45)\\
&\le \frac{(2a_n+1)a_n^2}{n\,\mathbb{E}[W_n]} + \mathbb{E}[W_n \mathbf{1}_{\{W_n > a_n\}}] + \mathbb{P}(w_U > a_n) + \mathbb{P}(D_U^{(2)} \neq 0) && (46)\\
&\xrightarrow[n\to\infty]{a_n^3 = o(n),(22),(17),(24)} 0. && (47)
\end{aligned}$$

Damit haben wir $D_U \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{Poi}(W)$ gezeigt.

1.1.2 Teil (b)

Wir imitieren den Beweis von Theorem 6.7(b). Zunächst nehmen wir an, dass für alle $i \neq j \in [m]$ gilt $U_i \neq U_j$. Diese Annahme können wir später mit Hilfe der Rechnung

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\bigcap\nolimits_{i\neq j\in[m]} \{U_i \neq U_j\}\Big) &= 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcup\nolimits_{i\neq j\in[m]} \{U_i = U_j\}\Big) && (48)\\
&\ge 1 - \sum_{i\neq j\in[m]} \underbrace{\mathbb{P}(U_i = U_j)}_{=\mathbb{E}[\mathbb{P}(U_i = U_j \mid U_j)]} && (49)\\
&\ge 1 - m^2/n \xrightarrow{n\to\infty} 1 && (50)
\end{aligned}$$

rechtfertigen.

Wir definieren mit Hilfe einer unabhängigen Kopie $(\hat{X}_{ij})_{i,j\in[n]}$ von $(X_{ij})_{i,j\in[n]}$ zu einer gegebenen Realisierung von $(U_i)_{i\in[m]}$:

$$\hat{D}_{U_i} := D_{U_i} + \sum_{k=1}^{i-1} \big(\hat{X}_{U_i U_k} - X_{U_i U_k}\big). \tag{51}$$

Wir tauschen also genau die Summanden aus, die schon einmal verwendet wurden: Die Summe in $\hat{D}_{U_i}$ enthält den Summanden $\begin{Bmatrix} X_{U_iU_j} \\ \hat{X}_{U_iU_j} \end{Bmatrix}$, wenn $\begin{Bmatrix} i < j \\ i > j \end{Bmatrix}$. Dadurch erreichen wir, dass bei gegebenem $(U_i)_{i\in[m]}$ die ZVn $\hat{D}_{U_i}$, $i \in [m]$, unabhängig.

Wir betrachten die Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big((D_{U_i})_{i\in[m]} \neq (\hat{D}_{U_i})_{i\in[m]} \bigm| (U_i)_{i\in[m]}\big) && (52)\\
&\le \mathbb{P}\big(\exists i \in [m] \colon \exists j \in [i-1] \colon X_{U_iU_j} \neq \hat{X}_{U_iU_j} \bigm| (U_i)_{i\in[m]}\big) && (53)\\
&\le \mathbb{P}\big(\exists i, j \in [m] \colon X_{U_iU_j} = 1 \text{ oder } \hat{X}_{U_iU_j} = 1 \bigm| (U_i)_{i\in[m]}\big) && (54)\\
&\le 2 \sum_{i,j\in[m]} \mathbb{P}(X_{U_iU_j} = 1 \mid (U_i)_{i\in[m]}) && (55)\\
&\overset{(6.3.17)}{\le} \frac{2}{\ell_n} \Big(\sum\nolimits_{i\in[m]} w_{U_i}\Big)^2. && (56)
\end{aligned}$$

Indem wir jetzt über $(U_i)_{i\in[m]}$ integrieren und $\mathcal{E}_n := \bigcap_{i\neq j\in[m]} \{U_i \neq U_j\}$ einführen, kommen wir zu

$$\mathbb{P}\big((D_{U_i})_{i\in[m]} \neq (\hat{D}_{U_i})_{i\in[m]}\big) \tag{57}$$

$$\leq \mathbb{E}\big[\mathbb{P}\big((D_{U_i})_{i\in[m]} \neq (\hat{D}_{U_i})_{i\in[m]} \,\big|\, (U_i)_{i\in[m]}\big)\mathbf{1}_{\mathcal{E}_n}\big] + \mathbb{P}(\mathcal{E}_n^c) \tag{58}$$

$$\leq \frac{2}{\ell_n}\,\mathbb{E}\Big[\Big(\sum\nolimits_{i\in[m]} w_{U_i}\Big)^2\Big] + \frac{m^2}{n} \tag{59}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{(6.3.18),\ (6.3.19)} 0. \tag{60}$$

Damit haben wir Korollar 6.9 vollständig gezeigt.

2 Die Gradfolge des GRG

Zu $\max_{k\geq 0}|P_k^{(n)} - p_k| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \implies$ (6.4.4): Dazu müssen wir nochmal in Aufgabe 2.16 hineinsehen.

Seien $\varepsilon, \kappa > 0$. Wir möchten zeigen: $\exists N \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq N\colon$

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}|P_k^{(n)} - p_k| \geq \varepsilon\Big) \leq \kappa. \tag{61}$$

Wähle $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so dass $\sum_{k=0}^{m_\varepsilon} p_k \geq 1 - \frac{\varepsilon}{4}$ und $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geq N$

$$\mathbb{P}\Big(\max_{k\geq 0}|P_k^{(n)} - p_k| \geq \frac{\varepsilon}{4(m_\varepsilon+1)}\Big) < \kappa. \tag{62}$$

Nach der Rechnung zur Aufgabe 2.16 ist

$$\Big\{\max_{k\geq 0}|P_k^{(n)} - p_k| < \frac{\varepsilon}{4(m_\varepsilon+1)}\Big\} \subseteq \Big\{\sum_{k=0}^{\infty}|P_k^{(n)} - p_k| < \varepsilon\Big\}. \tag{63}$$

Das belegt (61).

—

Aufgabe 6.17: Wir verwenden die ZV $\hat{Z}_U \sim \mathrm{Poi}(W_n)$ aus Korollar 6.9(a). Laut Bedingung 6.4(a) ist $W_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} W$, und daraus folgt $\hat{Z}_U \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{Poi}(W)$. Da $\hat{Z}_U$ nur ganzzahlige Werte hat, ist das äquivalent zu: Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\mathbb{P}(Z_U = k) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-W}W^k/k!] = p_k. \tag{64}$$

Nach Aufgabe 2.16 folgt daraus wiederum

$$\lim_{n\to\infty} d_{\mathrm{TV}}\big(\mathrm{Poi}(W_n), \mathrm{Poi}(W)\big) = 0. \tag{65}$$

Wir setzen zusammen:

$$\max_{k\in\mathbb{N}_0}|\mathbb{E}[P_k^{(n)}] - p_k| \overset{(6.4.6)}{=} \max_{k\in\mathbb{N}_0}|\mathbb{P}(D_U = k) - p_k| \tag{66}$$

$$\overset{(2.2.4)}{\leq} d_{\mathrm{TV}}(\mathbb{P}_{D_U}, \mathrm{Poi}(W)) \tag{67}$$

$$\leq d_{\mathrm{TV}}(\mathbb{P}_{D_U}, \mathrm{Poi}(W_n)) + d_{\mathrm{TV}}(\mathrm{Poi}(W_n), \mathrm{Poi}(W)) \tag{68}$$

$$\overset{\text{Thm. 2.9}}{\leq} \mathbb{P}(\hat{D}_U \neq \hat{Z}_U) + d_{\mathrm{TV}}(\mathrm{Poi}(W_n), \mathrm{Poi}(W)) \tag{69}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{\text{Thm. 6.9(a), (65)}} 0 \tag{70}$$

—

Die Argumentation zwischen (6.4.17) und (6.4.18) in Formeln mit der Abkürzung $A := \{(Y_{i;j} + X_{ij}, Y_{j;i} + X_{ij}) = (k,k), (Y_{i;j} + X_{ij}, Y_{j;i} + \hat{X}_{ij}) \neq (k,k)\}$ und mit Korrekturen:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A, X_{ij} \neq \hat{X}_{ij}) \tag{71}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(A, X_{ij} = 1, \hat{X}_{ij} = 0) + \mathbb{P}(A, X_{ij} = 0, \hat{X}_{ij} = 1) && (72)\\
&\le \mathbb{P}(Y_{j;i} + \hat{X}_{ij} = k-1, X_{ij} = 1) + \mathbb{P}(Y_{i;j} + X_{ij} = k, \hat{X}_{ij} = 1) && (73)\\
&= \mathbb{P}(Y_{j;i} + \hat{X}_{ij} = k-1)\,\mathbb{P}(X_{ij} = 1) + \mathbb{P}(Y_{i;j} + X_{ij} = k)\,\mathbb{P}(\hat{X}_{ij} = 1) && (74)\\
&= p_{ij}\big(\mathbb{P}(D_j = k-1) + \mathbb{P}(D_{U_i} = k)\big). && (75)
\end{aligned}
$$

In (6.4.19) wird die Summe über $k \ge 0$ über $\mathbb{P}(D_j = k-1) + \mathbb{P}(D_{U_i} = k)$ durch 2 abgeschätzt, nicht 1.

—

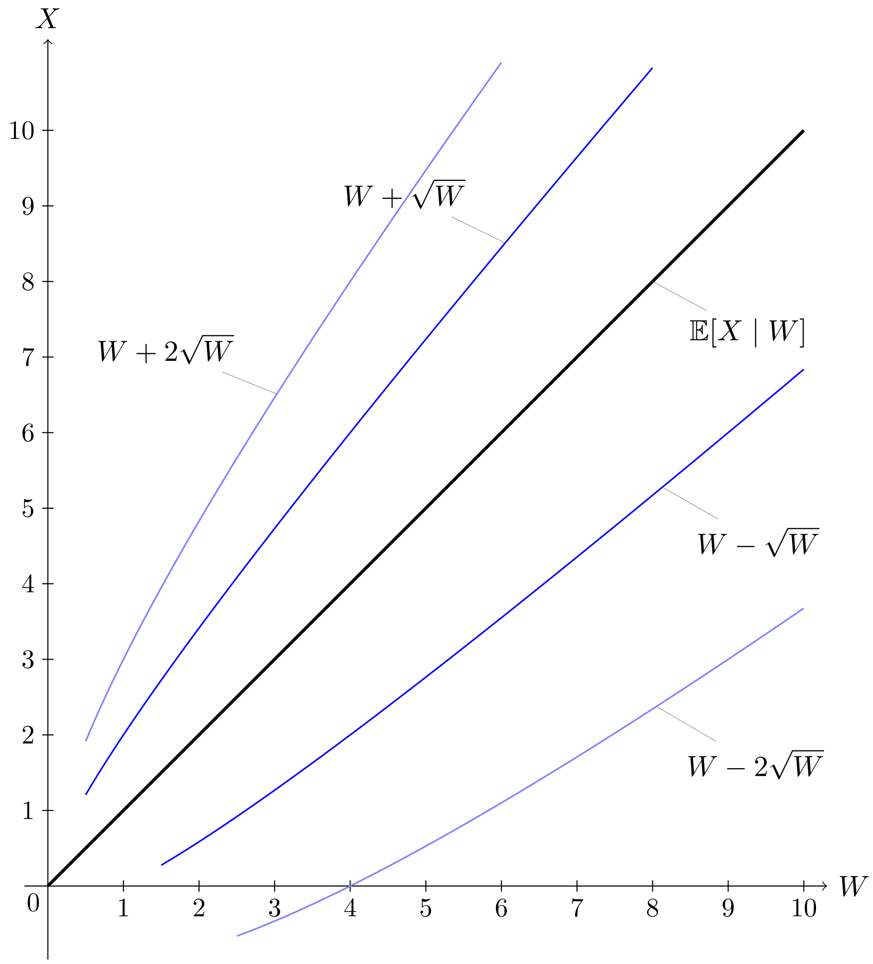
Aufgabe 6.12 belegt, dass man mit Hilfe des GRG wirklich zufällige Graphen mit Gradverteilungen herstellen kann, die einem Power Law genügen. Die Aussage ist plausibel, weil $X \sim \mathrm{Poi}(W)$ bei gegebenem W Poisson-verteilt ist und sich die damit für große W beim Erwartungswert $\mathbb{E}[X \mid W] = W$ konzentriert. Genauer gilt für $Y_\lambda \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$

$$\frac{Y_\lambda}{\lambda} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{\mathbb{P}} 1, \tag{76}$$

denn für alle $\varepsilon > 0$ ist

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{Y_\lambda}{\lambda} - 1\Big| \ge \varepsilon\Big) \le \frac{1}{\varepsilon^2}\operatorname{Var}\Big(\frac{Y_\lambda}{\lambda}\Big) = \frac{\lambda}{\varepsilon^2\lambda^2} = \frac{1}{\varepsilon^2\lambda} \xrightarrow{\lambda\to\infty} 0. \tag{77}$$

(Hier können wir sogar $\varepsilon = \varepsilon_\lambda$ zulassen, so lange $\varepsilon_\lambda = \omega(\sqrt{\lambda})$.) Mit unserer Modifikation der Definition der mixed Poisson-Verteilung haben wir W und X nämlich gekoppelt:



Konkreter können wir das so formalisieren:

$$\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{E}[\mathbb{P}(X > x \mid W)] \tag{78}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \mathbb{E}[\mathbb{P}(X > x \mid W)\mathbf{1}_{\{W>2x\}}] && (79)\\
&\geq \mathbb{P}(X > x \mid W = 2x)\, \mathbb{P}(W > 2x) && (80)\\
&\geq \mathbb{P}(X > x \mid W = 2x)\, c_1(2x)^{1-\tau}, && (81)
\end{aligned}
$$

denn $\lambda \mapsto \mathbb{P}(X > x \mid W = \lambda) = \big(\mathrm{Poi}(\lambda)\big)((x,\infty))$ ist monoton wachsend, weil die Poisson-Verteilungen stochastisch geordnet sind:

$$
\lambda < \mu \implies \mathrm{Poi}(\lambda) \preceq \mathrm{Poi}(\mu). \tag{82}
$$

Für $Y \sim \mathrm{Poi}(2x)$ haben wir

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > x \mid W = 2x) &= \mathbb{P}(Y > x) && (83)\\
&= 1 - \mathbb{P}(Y \leq x) && (84)\\
&= 1 - \mathbb{P}\big(Y - 2x \leq -x\big) && (85)\\
&\geq 1 - \mathbb{P}\big(|Y - 2x| \geq x\big) && (86)\\
&\geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(Y)}{x^2} = 1 - \frac{2x}{x^2} = 1 - \frac{2}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 1. && (87)
\end{aligned}
$$

Wir finden also ein $x_0 \geq 1$ so dass $\mathbb{P}(X > x \mid W = 2x) \geq \frac{1}{2}$ für alle $x \geq x_0$. Jetzt setzen wir

$$
c_1' := \mathbb{P}(X > x_0) \wedge \frac{c_1 2^{1-\tau}}{2} > 0. \tag{88}
$$

Damit folgt

$$
\mathbb{P}(X > x) \geq c_1' x^{1-\tau}, \tag{89}
$$

denn für $x \in [1, x_0]$ ist wegen $\tau > 1$

$$
\mathbb{P}(X > x) \geq \mathbb{P}(X > x_0) \geq c_1' \geq c_1' x^{1-\tau}. \tag{90}
$$

Für die umgekehrte Richtung betrachten wir

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > x) &= \mathbb{E}[\mathbb{P}(X > x \mid W)] && (91)\\
&= \mathbb{E}[\mathbb{P}(X > x \mid W)\mathbf{1}_{\{W \leq \frac{x}{2}\}}] + \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{P}(X > x \mid W)}_{\leq 1}\mathbf{1}_{\{W > \frac{x}{2}\}}] && (92)\\
&\leq \mathbb{P}(X > x \mid W = \tfrac{x}{2})\underbrace{\mathbb{P}(W \leq \tfrac{x}{2})}_{\leq 1} + \mathbb{P}(W > \tfrac{x}{2}) && (93)\\
&\leq \mathbb{P}(X > x \mid W = \tfrac{x}{2}) + c_2\big(\tfrac{x}{2}\big)^{1-\tau}. && (94)
\end{aligned}
$$

Diesmal genügt die Chebychev-Ungleichung nicht, wir müssen auf das Prinzip großer Abweichungen (Theorem 2.19, genauer: (2.4.8) mit $n = 1$) zurückgreifen. Zur Erinnerung: Die Ratenfunktion von $\mathrm{Poi}(\lambda)$ ist $I_\lambda(x) = x(\log\frac{x}{\lambda} - 1) + \lambda$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > x \mid W = \tfrac{x}{2}) &\leq \exp(-I_{x/2}(x)) && (95)\\
&= \exp\big(-x(\log\tfrac{x}{x/2} - 1) - \tfrac{x}{2}\big) && (96)\\
&= \exp\big(-x(\log 2 - \tfrac{1}{2})\big). && (97)
\end{aligned}
$$

Beachte, dass $\log 2 - \frac{1}{2} > 0$, denn $\log 2 > \frac{1}{2}$ bzw. $\log 4 > 1$ bzw. $4 > \mathrm{e}$. Damit ist

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > x) &\leq \exp\big(-x(\log 2 - \tfrac{1}{2})\big) + c_2 2^{\tau-1} x^{1-\tau} && (98)\\
&= \big(\underbrace{x^{\tau-1}\exp\big(-x(\log 2 - \tfrac{1}{2})\big)}_{\xrightarrow{x\to\infty} 0} + c_2 2^{\tau-1}\big) x^{1-\tau} && (99)\\
&\leq c_2' x^{1-\tau} && (100)
\end{aligned}
$$

mit $c_2' := \max\limits_{x\geq 1} x^{\tau-1}\exp\big(-x(\log 2 - \frac{1}{2})\big) + c_2 2^{\tau-1} < \infty$.