Zufällige Graphen

Christoph Schumacher

22. Juni 2020

RGCN I, Kap. 6.7, 6.8:
Asymptotische Äquivalenz von inhomogenen zufälligen Graphen

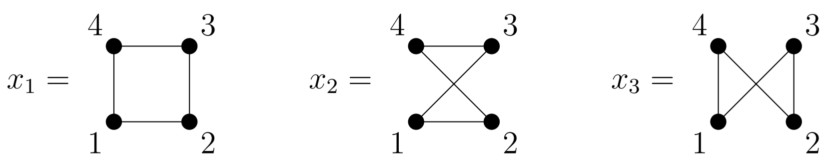
Zusammenfassung

Asymptotische Äquivalenz wird eingeführt und ein Kriterium gegeben, wenn zwei inhomogene zufällige Graphen asymptotisch äquivalent sind. Anschließend werden die inhomogenen zufälligen Graphen von Chung-Lu sowie von Norros-Reittu vorgestellt und untersucht, unter welchen Bedingungen sie und der GRG äquivalent sind. Es werden zwei weitere zufällige Graphen vorgestellt und auf Äquivalenz mit dem GRG untersucht. Am Ende wird eine stochastische Ordnung auf zufälligen Graphen eingeführt, was einem schnelle Vergleiche verschiedener Zufallsgraphen erlaubt.

Inhaltsverzeichnis

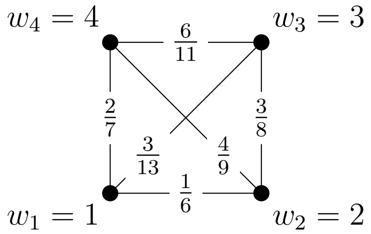
Fragen

1. Sind CL und NR auch umparametrisierte Varianten des GRG? — Nein, und ein zu (6.6.10) oder Theorem 6.15 analoges Resultat gibt es nicht für CL. Hier sind drei (isomorphe, aber dank der Knotenlabel nicht gleiche) Graphen mit derselben Gradfolge $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 2$:



Wir wählen $w_i = i$ und damit $\ell_4 = 10$. Für den GRG X ist also

GRG:



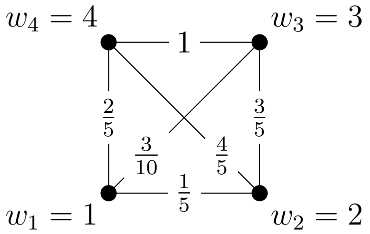
$$\mathbb{P}(X = x_1) = \frac{1}{6}\frac{10}{13}\frac{2}{7}\frac{3}{8}\frac{5}{9}\frac{6}{11} = \frac{25}{6006}$$
$$\mathbb{P}(X = x_2) = \frac{1}{6}\frac{3}{13}\frac{5}{7}\frac{5}{8}\frac{4}{9}\frac{6}{11} = \frac{25}{6006}$$
$$\mathbb{P}(X = x_3) = \frac{5}{6}\frac{3}{13}\frac{2}{7}\frac{3}{8}\frac{4}{9}\frac{5}{11} = \frac{25}{6006}$$

bzw. mit (6.6.10)

$$\mathbb{P}(X = x_k) = \frac{(\frac{1}{\sqrt{10}})^2(\frac{2}{\sqrt{10}})^2(\frac{3}{\sqrt{10}})^2(\frac{4}{\sqrt{10}})^2}{(1+\frac{2}{10})(1+\frac{3}{10})(1+\frac{4}{10})(1+\frac{6}{10})(1+\frac{8}{10})(1+\frac{12}{10})} \tag{1}$$
$$= \frac{4 \cdot 9 \cdot 16}{10^4} \frac{10^6}{12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 22} = \frac{25}{6006}. \tag{2}$$

Für den Chung-Lu-Graph Y erhalten wir

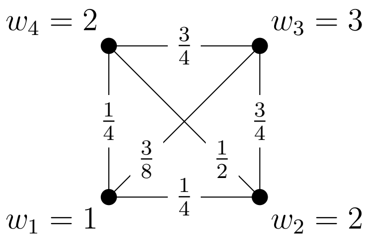
CL:



$$\mathbb{P}(Y = x_1) = \frac{1}{5}\frac{7}{10}\frac{2}{5}\frac{3}{5}\frac{1}{5}1 = \frac{21}{3125}$$
$$\mathbb{P}(Y = x_2) = \frac{1}{5}\frac{3}{10}\frac{3}{5}\frac{2}{5}\frac{4}{5}1 = \frac{36}{3125}$$
$$\mathbb{P}(Y = x_3) = \frac{4}{5}\frac{3}{10}\frac{2}{5}\frac{3}{5}\frac{4}{5}0 = 0.$$

Das liegt nicht daran, dass wir bei $p_{34} = \frac{12}{10} \wedge 1 = 1$ „abrunden“ mussten. Wenn wir das vierte Gewicht auf $w_4 := 2$ abändern, kommen wir auf $\ell_4 = 8$ und

CL:



$$\mathbb{P}(Y = x_1) = \frac{1}{4}\frac{5}{8}\frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{3}{4} = \frac{45}{4096}$$
$$\mathbb{P}(Y = x_2) = \frac{1}{4}\frac{3}{8}\frac{3}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{3}{4} = \frac{81}{4096}$$
$$\mathbb{P}(Y = x_3) = \frac{3}{4}\frac{3}{8}\frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{81}{4096}.$$

Die beiden Graphen x_2 und x_3 erhalten dieselbe Wahrscheinlichkeit, weil sie als gewichtete Graphen isomorph sind, so dass die Kantenwahrscheinlichkeiten im Produkt nur permutiert werden.

1 Asymptotische Äquivalenz

Zu Theorem 6.18: Die Vektoren $\mathbf{p} = (p_{ij})_{1 \le i < j \le n}$ und $\mathbf{q} = (q_{ij})_{1 \le i < j \le n}$ sind keine Wahrscheinlichkeitsvektoren: $\sum_{1 \le i < j \le n} p_{ij} \ne 1$. Sie stehen stellvertretend für die Verteilungen von $\mathrm{IRG}_n(\mathbf{p})$ bzw. $\mathrm{IRG}_n(\mathbf{q})$:

$$\mathbb{P}_n := \mathbb{P}\big(\mathrm{IRG}_n(\mathbf{p}) \in \ \cdot\ \big) \colon 2^{\mathcal{X}_n} \to [0,1], \tag{3}$$
$$\mathbb{Q}_n := \mathbb{P}\big(\mathrm{IRG}_n(\mathbf{q}) \in \ \cdot\ \big) \colon 2^{\mathcal{X}_n} \to [0,1], \tag{4}$$

welche auf der Potenzmenge $2^{\mathcal{X}_n}$ der Menge $\mathcal{X}_n$ aller Graphen mit Knotenmenge $[n]$ leben und die Zähldichten

$$\forall x \in \mathcal{X}_n \colon p_x := \mathbb{P}_n(x) = \mathbb{P}(\mathrm{IRG}_n(\mathbf{p}) = x) = \prod_{1 \le i < j \le n} p_{ij}^{x_{ij}} (1 - p_{ij})^{1 - x_{ij}} \tag{5}$$
$$\forall x \in \mathcal{X}_n \colon q_x := \mathbb{Q}_n(x) = \mathbb{P}(\mathrm{IRG}_n(\mathbf{q}) = x) = \prod_{1 \le i < j \le n} q_{ij}^{x_{ij}} (1 - q_{ij})^{1 - x_{ij}} \tag{6}$$

haben. Die Zufallsvariablen $\mathrm{IRG}_n(\mathbf{p})$ und $\mathrm{IRG}_n(\mathbf{q})$ sind asymptotisch äquivalent, wenn ihre Verteilungen $\mathbb{P}_n$ und $\mathbb{Q}_n$ asymptotisch äqivalent sind.

Wenn $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ ZVn sind, dann definieren wir

$$\mathbf{p} \simeq \mathbb{P}_n := \mathbb{P}\big(\mathrm{IRG}_n(\mathbf{p}) \in \,\cdot\, \mid \mathbf{p}\big) \colon 2^{\mathcal{X}_n} \to [0,1], \tag{7}$$
$$\mathbf{q} \simeq \mathbb{Q}_n := \mathbb{P}\big(\mathrm{IRG}_n(\mathbf{q}) \in \,\cdot\, \mid \mathbf{q}\big) \colon 2^{\mathcal{X}_n} \to [0,1]. \tag{8}$$

Dann sind die Zähldichten

$$\forall x \in \mathcal{X}_n \colon p_x := \mathbb{P}_n(x) = \mathbb{P}(\mathrm{IRG}_n(\mathbf{p}) = x \mid \mathbf{p}) = \prod_{1 \le i < j \le n} p_{ij}^{x_{ij}} (1 - p_{ij})^{1 - x_{ij}} \tag{9}$$
$$\forall x \in \mathcal{X}_n \colon q_x := \mathbb{Q}_n(x) = \mathbb{P}(\mathrm{IRG}_n(\mathbf{q}) = x \mid \mathbf{q}) = \prod_{1 \le i < j \le n} q_{ij}^{x_{ij}} (1 - q_{ij})^{1 - x_{ij}} \tag{10}$$

auch ZVn.

Theorem 6.18 liest sich dann so: Seien $\mathrm{IRG}_n(\mathbf{p})$ und $\mathrm{IRG}_n(\mathbf{q})$ zwei inhomogene zufällige Graphen mit Kantenwahrscheinlichkeiten $\mathbf{p} = (p_{ij})_{1 \le i < j \le n}$ bzw. $\mathbf{q} = (q_{ij})_{1 \le i < j \le n}$. Wir nehmen an, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt so dass

$$\limsup_{n \to \infty} \max_{1 \le i < j \le n} p_{ij} \le 1 - \varepsilon \quad \text{und} \quad \limsup_{n \to \infty} \max_{1 \le i < j \le n} q_{ij} \le 1 - \varepsilon. \tag{11}$$

Genau dann sind $\mathrm{IRG}_n(\mathbf{p})$ und $\mathrm{IRG}_n(\mathbf{q})$ asymptotisch äquivalent, wenn

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{(p_{ij} - q_{ij})^2}{p_{ij} \vee q_{ij}} = 0. \tag{12}$$

Wenn $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ ZVn sind und (11) fast sicher erfüllt ist, dann sind $\mathrm{IRG}_n(\mathbf{p})$ und $\mathrm{IRG}_n(\mathbf{q})$ genau dann asymptotisch äquivalent, wenn

$$\sum_{1 \le i < j \le n} \frac{(p_{ij} - q_{ij})^2}{p_{ij} \vee q_{ij}} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} 0. \tag{13}$$

In beiden Fällen sind $\mathrm{IRG}_n(\mathbf{p})$ und $\mathrm{IRG}_n(\mathbf{q})$ asymptotisch äquivalent, wenn für alle $\mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{X}_n$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \to \infty} \big(\mathbb{P}(\mathrm{IRG}_n(\mathbf{p}) \in \mathcal{E}_n) - \mathbb{P}(\mathrm{IRG}_n(\mathbf{q}) \in \mathcal{E}_n)\big) = 0. \tag{14}$$

Bei deterministischen Kantenwahrscheinlichkeiten ist $\mathbb{P}(\mathrm{IRG}_n(\mathbf{p}) \in \mathcal{E}_n) = \mathbb{P}_n(\mathcal{E}_n)$, bei zufälligen Kantenwahrscheinlichkeiten ist $\mathbb{P}(\mathrm{IRG}_n(\mathbf{p}) \in \mathcal{E}_n) = \mathbb{E}[\mathbb{P}_n(\mathcal{E}_n)]$.

—

Der Satz mit Formel (6.7.5) besagt, dass die Limiten in der Definition 6.17 (asymptotische Äquivalenz) sind gleichäßig in $(\mathcal{E}_n)_n$ sind. Wir zeigen im Ringschluss die Äquivalenz von

(i) $\mathbb{P}_n$ und $\mathbb{Q}_n$ sind asymptotisch äquivalent,
(ii) $d_{\mathrm{TV}}(\mathbb{P}_n, \mathbb{Q}_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$,
(iii) es gibt Kopplungen $(\hat{X}_n, \hat{Y}_n)$ mit $\hat{X}_n \sim \mathbb{P}_n$, $\hat{Y}_n \sim \mathbb{Q}_n$ und $\mathbb{P}(\hat{X}_n \neq \hat{Y}_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$,
(iv) es gibt ein/für alle $C > 0$ und für alle $f_n \colon \mathcal{X}_n \to [-C, C]$ gilt

$$\int f_n \, \mathrm{d}\mathbb{P}_n - \int f_n \, \mathrm{d}\mathbb{Q}_n \xrightarrow{n \to \infty} 0. \tag{15}$$

Mit Hilfe von $X_n \sim \mathbb{P}_n$, $Y_n \sim \mathbb{Q}_n$ kann man (15) so ausdrücken:

$$\lim_{n \to \infty} \big(\mathbb{E}[f_n(X_n)] - \mathbb{E}[f_n(Y_n)]\big) = 0. \tag{16}$$

Beweis. **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** Wir wählen zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Menge $\mathcal{E}_n \in \mathcal{F}_n$ so dass

$$|\mathbb{P}_n(\mathcal{E}_n) - \mathbb{Q}_n(\mathcal{E}_n)| > d_{\mathrm{TV}}(\mathbb{P}_n, \mathbb{Q}_n) - n^{-1}. \tag{17}$$

Dann ist

$$d_{\mathrm{TV}}(\mathbb{P}_n, \mathbb{Q}_n) \leq |\mathbb{P}_n(\mathcal{E}_n) - \mathbb{Q}_n(\mathcal{E}_n)| + n^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{18}$$

(ii) $\Longrightarrow$ **(iii)** Theorem 2.9 liefert Kopplungen $(\hat{X}_n, \hat{Y}_n)$ mit

$$\mathbb{P}(\hat{X}_n, \hat{Y}_n) = d_{\mathrm{TV}}(\mathbb{P}_n, \mathbb{Q}_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{19}$$

(iii) $\Longrightarrow$ **(iv)** Für jede Funktionenfolge $f_n \colon \mathcal{X} \to [-C, C]$ ist

$$\begin{aligned} \big|\mathbb{E}[f_n(\hat{X}_n) - f_n(\hat{Y}_n)]\big| &\leq \mathbb{E}[|f_n(\hat{X}_n) - f_n(\hat{Y}_n)|\mathbf{1}_{\{\hat{X}_n \neq \hat{Y}_n\}}] && (20)\\ &\leq 2C\mathbb{P}(\hat{X}_n \neq \hat{Y}_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0. && \square \end{aligned}$$

(iv) $\Longrightarrow$ **(i)** Wähle $f_n := C^{-1}\mathbf{1}_{\mathcal{E}_n}$.

2 Mehr zur Totalvariation

Gleichung (6.7.6) kann man auf zwei Arten nachrechnen:

$$\begin{aligned} &d_{\mathrm{TV}}\big(\mathrm{Bin}(1,p), \mathrm{Bin}(1,q)\big) && (21)\\ &= \begin{cases} \max\{|0-0|, |p-q|, |1-p-(1-q)|, |1-1|\} \\ \frac{1}{2}\big(|p-q| + |1-p-(1-q)|\big) \end{cases} && (22)\\ &= |p-q| && (23) \end{aligned}$$

—

Formel (6.7.8) kann man in der vereinfachten Form mit nur zwei Faktoren im Produkt so einsehen:

$$\begin{aligned} &d_{\mathrm{TV}}(\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2, \mathbb{Q}_1 \otimes \mathbb{Q}_2) && (24)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{(x,y)} |\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2(x,y) - \mathbb{Q}_1 \otimes \mathbb{Q}_2(x,y)| && (25)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{(x,y)} \big|\big(\mathbb{P}_1(x) - \mathbb{Q}_1(x)\big)\mathbb{P}_2(y) + \mathbb{Q}_1(x)\big(\mathbb{P}_2(y) - \mathbb{Q}_2(y)\big)\big| && (26)\\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{(x,y)} \big|\mathbb{P}_1(x) - \mathbb{Q}_1(x)\big|\big)\mathbb{P}_2(y) + \frac{1}{2}\sum_{(x,y)} \mathbb{Q}_1(x)\big|\mathbb{P}_2(y) - \mathbb{Q}_2(y)\big| && (27)\\ &= d_{\mathrm{TV}}(\mathbb{P}_1, \mathbb{Q}_1) + d_{\mathrm{TV}}(\mathbb{P}_2, \mathbb{Q}_2). && (28) \end{aligned}$$

Mit Induktion kann man die Formel auf $\binom{n}{2}$-fache Produkte erweitern.

Bei der Abschätzung kann man wirklich was verlieren:

$$d_{\mathrm{TV}}(\delta_0 \otimes \delta_1, \delta_1 \otimes \delta_0) = 1 < 2 = d_{\mathrm{TV}}(\delta_0, \delta_1) + d_{\mathrm{TV}}(\delta_1, \delta_0). \tag{29}$$

Die Abschätzung im Beweis von Theorem 6.18 ist schärfer als (6.7.8).

—

Die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung des Erdős-Rényi-Graph X_n bei Bedingung auf das Ereignis $\{M(X_n) = m\}$, wobei $M(X_n)$ die Anzahl der Kanten des ER-Graphs X_n ist, ist die Gleichverteilung auf allen Graphen x mit m Kanten:

$$\mathbb{P}(X_n = x \mid M(X_n) = m) = \frac{\mathbb{P}(X_n = x, M(X_n) = m)}{\mathbb{P}(M(X_n) = m)} \tag{30}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_n = x)}{\mathbb{P}(M(X_n) = m)} \mathbf{1}_{\{M(x)=m\}} \tag{31}$$

$$= \frac{p^m (1-p)^{\binom{2}{n}-m}}{\binom{\binom{n}{2}}{m} p^m (1-p)^{\binom{2}{n}-m}} \mathbf{1}_{\{M(x)=m\}} \tag{32}$$

$$= \binom{\binom{n}{2}}{m}^{-1} \mathbf{1}_{\{M(x)=m\}}. \tag{33}$$

Das gilt für alle Kantenwahrscheinlichkeiten $p \in (0,1)$. Vergleiche mit Theorem 6.15 für den GRG.

—

Aufgabe 6.31? — vielleicht später… ach nein, es gibt wichtigeres.

3 Zum Beweis von Theorem 6.18

Zu (6.7.12):

$$\big(d_{\mathrm{H}}(p,q)\big)^2 = \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathcal{X}} (\sqrt{p_x} - \sqrt{q_x})^2 \tag{34}$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathcal{X}} |(\sqrt{p_x} - \sqrt{q_x})(\sqrt{p_x} + \sqrt{q_x})| \tag{35}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathcal{X}} |p_x - q_x| = d_{\mathrm{TV}}(p,q). \tag{36}$$

Für die andere Seite nutzen wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$d_{\mathrm{TV}}(p,q) = \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathcal{X}} |\sqrt{p_x} - \sqrt{q_x}|(\sqrt{p_x} + \sqrt{q_x}) \tag{37}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathcal{X}} |\sqrt{p_x} - \sqrt{q_x}|\sqrt{p_x} + \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathcal{X}} |\sqrt{p_x} - \sqrt{q_x}|\sqrt{q_x} \tag{38}$$

$$\leq \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{x \in \mathcal{X}} (\sqrt{p_x} - \sqrt{q_x})^2 \sum_{x \in \mathcal{X}} p_x} + \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{x \in \mathcal{X}} (\sqrt{p_x} - \sqrt{q_x})^2 \sum_{x \in \mathcal{X}} q_x} \tag{39}$$

$$= \sqrt{\sum_{x \in \mathcal{X}} (\sqrt{p_x} - \sqrt{q_x})^2} = \sqrt{2} d_{\mathrm{H}}(p,q). \tag{40}$$

—

Mit Abschätzung (6.7.12) charakterisiert man asymptotische Äquivalenz mit Hilfe des Hellinger-Abstands:

(v) $d_{\mathrm{H}}(\mathbb{P}_n, \mathbb{Q}_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

—

Abschätzung (6.7.14) und (6.7.15) mit $p, q \in [0,1]$:

$$\rho(p,q) = (\sqrt{p} - \sqrt{q})^2 + (\sqrt{1-p} - \sqrt{1-q})^2 \tag{41}$$
$$= \Big(\frac{p-q}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}\Big)^2 + \Big(\frac{1-p-(1-q)}{\sqrt{1-p}+\sqrt{1-q}}\Big)^2 \tag{42}$$
$$\le (p-q)^2\Big(\frac{1}{(\sqrt{p}+0)^2} + \frac{1}{(\sqrt{1-p}+0)^2}\Big) \tag{43}$$
$$= (p-q)^2 \frac{1-p+p}{p(1-p)} \tag{44}$$
$$\overset{1-p\ge\varepsilon}{\le} \frac{(p-q)^2}{\varepsilon p}, \tag{45}$$

also funktioniert $C := \frac{1}{\varepsilon}$.

—

Zu (6.7.16):

$$1 - \big(d_{\mathrm{H}}(\mathbb{P}_n, \mathbb{Q}_n)\big)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathcal{X}}\big(\sqrt{p_x} - \sqrt{q_x}\big)^2 \tag{46}$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathcal{X}}\big(p_x - 2\sqrt{p_x}\sqrt{q_x} + q_x\big) \tag{47}$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\Big(2 - 2\sum\nolimits_{x\in\mathcal{X}}\sqrt{p_x}\sqrt{q_x}\Big) \tag{48}$$
$$= \sum_{x\in\mathcal{X}}\sqrt{p_x}\sqrt{q_x} \tag{49}$$

—

Um (6.7.18) zu verstehen, rechnen wir erst nach, dass

$$1 - \frac{1}{2}\rho(p_{ij}, q_{ij}) = 1 - \frac{1}{2}\big((\sqrt{p_{ij}} - \sqrt{q_{ij}})^2 + (\sqrt{1-p_{ij}} - \sqrt{1-q_{ij}})^2\big) \tag{50}$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\Big(p_{ij} - 2\sqrt{p_{ij}q_{ij}} + q_{ij} \tag{51}$$
$$+ 1 - p_{ij} - 2\sqrt{(1-p_{ij})(1-q_{ij})} + 1 - q_{ij}\Big) \tag{52}$$
$$= \sqrt{p_{ij}q_{ij}} + \sqrt{(1-p_{ij})(1-q_{ij})}. \tag{53}$$

Jetzt wählen wir in (6.7.16)

$$\mathcal{X} := \mathcal{X}_n = \{0,1\}^{\{(i,j):\, 1\le i<j\le n\}} \tag{54}$$

als die Menge der Graphen auf $[n]$ und für jeden Graph $x = (x_{ij}) \in \mathcal{X}$ die Wahrscheinlichkeit

$$p_x := \mathbb{P}_n(x) = \prod_{1\le i<j\le n} p_{ij}^{x_{ij}}(1-p_{ij})^{1-x_{ij}} \tag{55}$$

wählen. Das erklärt (6.7.18):

$$H(\mathbb{P}_n, \mathbb{Q}_n) \overset{(6.7.16)}{=} \sum_{x\in\mathcal{X}}\sqrt{p_x}\sqrt{q_x} \tag{56}$$
$$= \sum_{x\in\mathcal{X}}\prod_{1\le i<j\le n}\big(\sqrt{p_{ij}q_{ij}}\big)^{x_{ij}}\Big(\sqrt{(1-p_{ij})(1-q_{ij})}\Big)^{1-x_{ij}} \tag{57}$$
$$\overset{\star}{=} \prod_{1\le i<j\le n}\Big(\sqrt{p_{ij}q_{ij}} + \sqrt{(1-p_{ij})(1-q_{ij})}\Big) \tag{58}$$
$$\overset{(50)}{=} \prod_{1\le i<j\le n}\Big(1 - \frac{1}{2}\rho(p_{ij}, q_{ij})\Big). \tag{59}$$

Die Stelle $\star$ liest man besser rückwärts, da wird beim Ausmultiplizieren die Regel „Jeder mit jedem“ angewendet. Welchen Term man auswählt, notiert man in x, und dann summiert man über alle Möglichkeiten x.[1]

—

Zu (6.7.21): Wir wissen: Für alle $k \in \mathbb{N}$ gibt es $N_k \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft dass für alle $n \geq N_k$ gilt:

$$\mathbb{P}\Big(\sum\nolimits_{1\leq i<j\leq n} \frac{(p_{ij}-q_{ij})^2}{p_{ij}} \geq \frac{1}{k}\Big) < \frac{1}{k}. \tag{63}$$

Setze nun für alle $n \in [N_k, N_{k+1})$:

$$\varepsilon_n := \frac{1}{k}. \tag{64}$$

Damit ist garantiert, dass $\varepsilon_n \to 0$ und (6.7.21) beide erfüllt sind, nur über die Konvergenzgeschwindigkeit wissen wir gar nichts.

—

Zur Verdeutlichung des probabilistischen Arguments fassen wir die deterministische Argumentationskette nochmal zusammen:

$$\begin{aligned}
|\mathbb{P}_n(\mathcal{E}_n) - \mathbb{Q}_n(\mathcal{E}_n)| &\overset{(2.2.4)}{\leq} d_{\mathrm{TV}}(\mathbb{P}_n, \mathbb{Q}_n) && (65)\\
&\overset{(6.7.12)}{\leq} \sqrt{2} d_{\mathrm{H}}(\mathbb{P}_n, \mathbb{Q}_n) && (66)\\
&\overset{(6.7.17)}{=} \sqrt{2}\sqrt{1 - H(\mathbb{P}_n, \mathbb{Q}_n)} && (67)\\
&\overset{(6.7.19)}{\leq} \sqrt{\sum_{1\leq i<j\leq n} \rho(p_{ij}, q_{ij})} && (68)\\
&\overset{(6.7.20)}{\leq} \sqrt{C \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{(p_{ij}-q_{ij})^2}{p_{ij}}} && (69)
\end{aligned}$$

Das heißt:

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{(p_{ij}-q_{ij})^2}{p_{ij}} \leq \varepsilon_n \implies |\mathbb{P}_n(\mathcal{E}_n) - \mathbb{Q}_n(\mathcal{E}_n)| \leq \sqrt{C\varepsilon_n}. \tag{70}$$

Ab nun seien $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ ZVn auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Wir notieren mit $\mathbb{P}_n := \mathbb{P}(\mathrm{IRG}_n(\mathbf{p}) \in \cdot \mid \mathbf{p})$ bzw. $\mathbb{Q}_n := \mathbb{P}(\mathrm{IRG}_n(\mathbf{q}) \in \cdot \mid \mathbf{q})$ die

[1]Um sicherzugehen, beweisen wir die folgende Formel: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ gilt

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{x\in\mathcal{I}_n} \prod_{k=1}^{n} a_k^{x_k} b_k^{1-x_k} \tag{60}$$

mit $\mathcal{I}_n := \{0,1\}^n$. Wir verwenden Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

IA: Für $n = 1$ ist $\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = a_1 + b_1$ und $\sum_{x\in\mathcal{I}_n} \prod_{k=1}^{n} a_k^{x_k} b_k^{1-x_k} = a_1 + b_1$. ($n = 0$ geht auch.)

IV: Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei $\prod_{k=1}^{n-1}(a_k + b_k) = \sum_{x\in\mathcal{X}_{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} a_k^{x_k} b_k^{1-x_k}$ erfüllt.

IS: Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_k) &= \sum_{x\in\mathcal{X}_{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} a_k^{x_k} b_k^{1-x_k}(a_n + b_n) && (61)\\
&= \sum_{x\in\mathcal{X}_{n-1}} \Big(a_n \prod_{k=1}^{n-1} a_k^{x_k} b_k^{1-x_k} + b_n \prod_{k=1}^{n-1} a_k^{x_k} b_k^{1-x_k}\Big) = \sum_{x\in\mathcal{X}_n} \prod_{k=1}^{n} a_k^{x_k} b_k^{1-x_k}. && (62)
\end{aligned}$$

bedingten Verteilungen von $\mathrm{IRG}(\mathbf{p})$ bzw. von $\mathrm{IRG}(\mathbf{q})$ bei gegebener Realisierung von $\mathbf{p}$ bzw. $\mathbf{q}$. Dann ist

$$A_n := \Big\{\sum\nolimits_{1\le i<j\le n} \frac{(p_{ij}-q_{ij})^2}{p_{ij}} \le \varepsilon_n\Big\} \overset{(70)}{\subseteq} \Big\{|\mathbb{P}_n(\mathcal{E}_n) - \mathbb{Q}_n(\mathcal{E}_n)| \le \sqrt{C\varepsilon_n}\Big\}. \tag{71}$$

Für Ereignisse $\mathcal{E}_n \in \mathcal{X}_n$, $n \in \mathbb{N}$, rechnen wir:

$$\begin{aligned}
&\big|\mathbb{P}\big(\mathrm{IRG}_n(\mathbf{p}) \in \mathcal{E}_n\big) - \mathbb{P}\big(\mathrm{IRG}_n(\mathbf{q}) \in \mathcal{E}_n\big)\big| && (72)\\
&= \big|\mathbb{E}[\mathbb{P}_n(\mathcal{E}_n)] - \mathbb{E}[\mathbb{Q}_n(\mathcal{E}_n)]\big| && (73)\\
&\le \mathbb{E}[|\mathbb{P}_n(\mathcal{E}_n) - \mathbb{Q}_n(\mathcal{E}_n)|] && (74)\\
&= \mathbb{E}[|\mathbb{P}_n(\mathcal{E}_n) - \mathbb{Q}_n(\mathcal{E}_n)| \mid A_n]\mathbb{P}(A_n) && (75)\\
&\qquad + \mathbb{E}[|\mathbb{P}_n(\mathcal{E}_n) - \mathbb{Q}_n(\mathcal{E}_n)| \mid A_n^c]\mathbb{P}(A_n^c) && (76)\\
&\le \mathbb{E}[|\mathbb{P}_n(\mathcal{E}_n) - \mathbb{Q}_n(\mathcal{E}_n)| \mid A_n] + \mathbb{P}(A_n^c) && (77)\\
&\le \sqrt{C\varepsilon_n} + \mathbb{P}(A_n^c) \xrightarrow{n\to\infty} 0. && (78)
\end{aligned}$$

Für die fehlende Richtung der nach (6.7.21) behaupteten Äquivalenzaussage:

$$\begin{aligned}
&\big|\mathbb{E}[\mathbb{P}_n(\mathcal{E}_n) - \mathbb{Q}_n(\mathcal{E}_n) \mid A_n]\big| && (79)\\
&= \left|\frac{\mathbb{E}[\mathbb{P}_n(\mathcal{E}_n) - \mathbb{Q}_n(\mathcal{E}_n) \mid A_n] - \mathbb{E}[\mathbb{P}_n(\mathcal{E}_n) - \mathbb{Q}_n(\mathcal{E}_n) \mid A_n^c]\mathbb{P}(A_n^c)}{\mathbb{P}(A_n)}\right| && (80)\\
&\le \frac{1}{\mathbb{P}(A_n)}\Big(\big|\mathbb{E}[\mathbb{P}_n(\mathcal{E}_n) - \mathbb{Q}_n(\mathcal{E}_n) \mid A_n]\big| + \mathbb{P}(A_n^c)\Big). && (81)
\end{aligned}$$

4 Optimalität von Theorem 6.18

Nach dem Beweis von Theorem 6.18 steht die Behauptung

$$\exists c = c(\varepsilon) \ge 0\colon \rho(p,q) \ge c(p-q)^2/p. \tag{82}$$

Tatsächlich ist $c = 0$, denn zum Beispiel mit $p = \frac{1}{k^2}$ und $q = \frac{1}{k}$ ist

$$\rho(p,q) = \Big(\sqrt{\frac{1}{k^2}} - \sqrt{\frac{1}{k}}\Big)^2 + \Big(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}} - \sqrt{1-\frac{1}{k}}\Big)^2 \xrightarrow{k\to\infty} 0, \tag{83}$$

während

$$\frac{(p-q)^2}{p} = \frac{\big(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k}\big)^2}{\frac{1}{k^2}} = k^2\Big(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k}\Big)^2 = \Big(\frac{1}{k}-1\Big)^2 \xrightarrow{k\to\infty} 1. \tag{84}$$

Das hilft leider gar nichts. Falls allerdings $q \le p$ vorliegt, können wir so abschätzen:

$$\begin{aligned}
\rho(p,q) &= \big(\sqrt{p}-\sqrt{q}\big)^2 + \big(\sqrt{1-p}-\sqrt{1-q}\big)^2 && (85)\\
&= \Big(\frac{p-q}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}\Big)^2 + \Big(\frac{(1-p)-(1-q)}{\sqrt{1-p}+\sqrt{1-q}}\Big)^2 && (86)\\
&= (p-q)^2\frac{(\sqrt{1-p}+\sqrt{1-q})^2 + (\sqrt{p}+\sqrt{q})^2}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2(\sqrt{1-p}+\sqrt{1-q})^2} && (87)\\
&\overset{0\le q\le p\le 1}{\ge} (p-q)^2\frac{(\sqrt{1-p}+\sqrt{0})^2 + (\sqrt{p}+\sqrt{0})^2}{(\sqrt{p}+\sqrt{p})^2(\sqrt{1}+\sqrt{1})^2} && (88)\\
&= \frac{(p-q)^2}{16p}. && (89)
\end{aligned}$$

Da funktioniert also $c = \frac{1}{16}$, ganz unabhängig von ε. Mein Vorschlag ist daher, in Theorem 6.18 zusätzlich

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{1\le i<j\le n} q_{ij} \le 1-\varepsilon \tag{90}$$

anzunehmen und den Symmetriebruch aus (6.7.15) zu beheben, indem man in (6.7.2)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{1\le i<j\le n} \frac{(p_{ij}-q_{ij})^2}{p_{ij}\vee q_{ij}} = 0 \tag{91}$$

schreibt (Notation: $a\vee b := \max\{a,b\}$). Bedingung (91) ist dann tatsächlich äquivalent zur asymptotischen Äquivalenz von der inhomogenen zufälligen Graphen zu $\mathbf{p} = (p_{ij})$ und $\mathbf{q} = (q_{ij})$:

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i<j\le n} \frac{(p_{ij}-q_{ij})^2}{p_{ij}\vee q_{ij}} &\overset{(89)}{\le} \frac{1}{c} \sum_{1\le i<j\le n} \rho(p_{ij}, q_{ij}) && (92)\\
&\overset{(6.7.19)}{\le} -\frac{2}{c}\log H(\mathbb{P}_n, \mathbb{Q}_n) && (93)\\
&\overset{(6.7.16)}{=} -\frac{2}{c}\log\big(1-(d_{\mathrm{H}}(\mathbb{P}_n,\mathbb{Q}_n))^2\big) && (94)\\
&\overset{(6.7.12)}{\le} -\frac{2}{c}\log\big(1-d_{\mathrm{TV}}(\mathbb{P}_n,\mathbb{Q}_n)\big) && (95)\\
&\xrightarrow{d_{\mathrm{TV}}(\mathbb{P}_n,\mathbb{Q}_n)\to 0} 0. && (96)
\end{aligned}$$

Die Rückrichtung lässt sich auch auf den Fall zufälliger Kantenwahrscheinlichkeiten übertragen. Wenn (6.7.3) nicht erfüllt ist, also

$$\sum_{1\le i<j\le n} \frac{(p_{ij}-q_{ij})^2}{p_{ij}\vee q_{ij}} \tag{97}$$

nicht in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert, dann gibt es ein $\kappa > 0$ so dass für

$$B_n(\kappa) := \Big\{\sum\nolimits_{1\le i<j\le n} \frac{(p_{ij}-q_{ij})^2}{p_{ij}\vee q_{ij}} \ge \kappa\Big\} \tag{98}$$

gilt:

$$\delta := \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(B_n(\kappa)\big) > 0. \tag{99}$$

Abschätzung (95) umgestellt impliziert dann, dass auf dem Ereignis $B_n(\kappa)$ gilt:

$$\begin{aligned}
d_{\mathrm{TV}}(\mathbb{P}_n,\mathbb{Q}_n) &\ge 1-\exp\Big(-\frac{c}{2}\sum_{1\le i<j\le n}\frac{(p_{ij}-q_{ij})^2}{p_{ij}\vee q_{ij}}\Big) && (100)\\
&\ge 1-\exp\Big(-\frac{c}{2}\kappa\Big) > 0 && (101)
\end{aligned}$$

mit Wahrscheinlichkeit größer als $\kappa > 0$. Wir wählen jetzt $\mathcal{E}_n \in \mathcal{X}_n$ derart, dass

$$d_{\mathrm{TV}}(\mathbb{P}_n,\mathbb{Q}_n) = \mathbb{P}_n(\mathcal{E}_n) - \mathbb{Q}_n(\mathcal{E}_n) \tag{102}$$

erfüllt ist. Das geht, weil $\mathcal{X}_n$ eine endliche Menge ist und daher das Supremum aus der Definition (2.2.4) von d_{TV} ein Maximum ist. Wir folgern

$$\limsup_{n\to\infty}\big(\mathbb{P}(\mathrm{IRG}_n(\mathbf{p})\in\mathcal{E}_n)-\mathbb{P}(\mathrm{IRG}_n(\mathbf{q})\in\mathcal{E}_n)\big) \tag{103}$$
$$=\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}[\mathbb{P}_n(\mathcal{E}_n)-\mathbb{Q}_n(\mathcal{E}_n)] \tag{104}$$
$$\overset{(102)}{=}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}[d_{\mathrm{TV}}(\mathbb{P}_n,\mathbb{Q}_n)] \tag{105}$$
$$\geq\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}[d_{\mathrm{TV}}(\mathbb{P}_n,\mathbb{Q}_n)\mathbf{1}_{B_n(\kappa)}] \tag{106}$$
$$\overset{(101)}{\geq}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}[\big(1-\exp(-c\kappa/2)\big)\mathbf{1}_{B_n(\kappa)}] \tag{107}$$
$$\overset{(99)}{=}\big(1-\exp(-c\kappa/2)\big)\delta \tag{108}$$
$$>0. \tag{109}$$

5 Der Chung-Lu-Zufallsgraph

Die Intuition vor Theorem 6.19 ist: $\mathrm{CL}_n(\mathbf{w})$ und $\mathrm{GRG}_n(\mathbf{w})$ sollten asymptotisch äquivalent sein, wenn $\frac{w_i}{\sqrt{\ell_n}}$ klein wird. Letzteres wird von den Bedingungen 6.4(a)–(c) impliziert, das ist also hier das natürliche Setting.

Im Beweis von Theorem 6.19 wird in (6.8.7) im letzten Schritt

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\ell_n}{n}>0 \tag{110}$$

verwendet, und das kann nicht aus (6.8.4) folgen: Zum Beispiel für $w_i := \frac{1}{n^2}$ ist (6.8.4) erfüllt:

$$\frac{1}{n^{3/2}}\sum_{i\in[n]}w_i^3=\frac{n}{n^{3/2}}\frac{1}{n^6}\to 0, \tag{111}$$

während $\ell_n=\sum_{i\in[n]}w_i=\frac{1}{n}$. Bedingung 6.4(a)–(b) verhindern dieses Verhalten, denn aus 6.4(b) folgt

$$\frac{\ell_n}{n}=\mathbb{E}[W_n]\to\mathbb{E}[W]>0. \tag{112}$$

Es gibt zwei Möglichkeiten, Theorem 6.19 zu reparieren.

A. Wir ändern (6.8.4) zu

$$\sum_{i\in[n]}w_i^3=o(\ell_n^{3/2}). \tag{113}$$

B. Wir nehmen zusätzlich die Bedingungen 6.4(a)–(b) an.

In beiden Fällen braucht man Abschätzung (6.8.6) nicht, wenn man statt wie in (6.8.7) folgendermaßen abschätzt:

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{(p_{ij}-p_{ij}^{(\mathrm{CL})})^2}{p_{ij}\vee p_{ij}^{(\mathrm{CL})}}\leq\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{w_i^3w_j^3}{\ell_n^3} \tag{114}$$
$$\leq\frac{1}{\ell_n^3}\Big(\sum_{i\in[n]}w_i^3\Big)^2 \tag{115}$$
$$=\begin{cases}\Big(\frac{1}{\ell_n^{3/2}}\sum_{i\in[n]}w_i^3\Big)^2 & \xrightarrow[n\to\infty]{(113)} 0,\\ \frac{1}{(\ell_n/n)^3}\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\sum_{i\in[n]}w_i^3\Big)^2 & \xrightarrow[n\to\infty]{(112),\ (6.8.4)} 0.\end{cases} \tag{116}$$

In Korollar 6.20 stimmt das Setting wieder, und die Aussage ist korrekt.

6 Der Norros-Reittu-Zufallsgraph

Die origin story des Norros-Reittu-Graphen lagern wir in die Übungen aus.

7 Stochastische Ordnung bei Zufallsgraphen

Für wachsende Ereignisse $\mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{X}_n$ ist nach (6.8.13)

$$\mathbb{P}(\mathrm{GRG}_n(\mathbf{w}) \in \mathcal{E}_n) \leq \mathbb{P}(\mathrm{NR}_n(\mathbf{w}) \in \mathcal{E}_n) \leq \mathbb{P}(\mathrm{CL}_n(\mathbf{w}) \in \mathcal{E}_n), \tag{117}$$

also unter den Bediungungen 6.4(a)–(c)

$$0 \leq \mathbb{P}(\mathrm{NR}_n(\mathbf{w}) \in \mathcal{E}_n) - \mathbb{P}(\mathrm{GRG}_n(\mathbf{w}) \in \mathcal{E}_n) \tag{118}$$

$$\leq \mathbb{P}(\mathrm{CL}_n(\mathbf{w}) \in \mathcal{E}_n) - \mathbb{P}(\mathrm{GRG}_n(\mathbf{w}) \in \mathcal{E}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Kor. 6.20}} 0. \tag{119}$$

Insbesondere sind die Ereignisse $\{X_{ij} = 1\}$ wachsend, denn durch das Einfügen zusätzlicher Kanten geht die Kante ij ja nicht wieder weg. Das bedeutet, dass die wachsenden Ereignisse die σ-Algebra $\sigma(X_{ij}; i \neq j \in [n])$ erzeugen. Obendrein ist der Schnitt zweier wachsender Ereignisse ebenfalls wachsend, so dass das System der wachsenden Ereignisse ein $\cap$-stabiler Erzeuger und damit verteilungsbestimmend ist. Das heißt, dass (119) ausreicht, um die asymptotische Äquivalenz von $\mathrm{NR}_n(\mathbf{w})$ und $\mathrm{GRG}_n(\mathbf{w})$ zu beweisen.