Zufällige Graphen

Christoph Schumacher

29. Juni 2020

RGCN I, Kap. 7.4, 7.5:
Das Konfigurationsmodell Teil II

Zusammenfassung

Das Konfigurationsmodell (CM):
- Einfache Graphen im CM
- Verbindung zum GRG
- Zufällige Knotengrade im GRG

Inhaltsverzeichnis

Fragen

1. —

1 Die Wahrscheinlichkeit, einfach zu sein

Theorem 7.12 bestimmt die asymptotische Wahrscheinlichkeit des Konfigurationsmodells, einen einfachen Graphen zu realisieren: Gegeben Bedingungen 7.8(a)–(c) mit asymptotischem Knotengrad D ist

$$\mathbb{P}(\mathrm{CM}_n(\mathbf{d}) \text{ ist einfach}) \xrightarrow{n\to\infty} \exp\Big(-\frac{\nu}{2} - \frac{\nu^2}{4}\Big) \tag{1}$$

mit $\nu = \frac{\mathbb{E}[D(D-1)]}{\mathbb{E}[D]}$.

Im Beweis wird $\{\mathrm{CM}_n(\mathbf{d}) \text{ ist einfach}\} = \{S_n = \widetilde{M}_n = 0\}$ verwendet, wobei S_n die Anzahl der Schleifen und $\widetilde{M}_n$ der Anzahl der Paare von Mehrfachkanten zwischen denselben Knoten in $\mathrm{CM}_n(\mathbf{d})$. Wenn es nämlich keine Schleifen und keine Paare von Mehrfachkanten zwischen denselben Knoten gibt, ist der Graph einfach. Der Satz folgt dann aus dem allgemeineren Theorem 7.13, das besagt: Aus Bedingungen 7.8(a)–(c) folgt

$$(S_n, \widetilde{M}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mathrm{Poi}(\nu/2) \otimes \mathrm{Poi}(\nu^2/4). \tag{2}$$

Das bedeutet nämlich insbesondere $\mathbb{P}\big((S_n,\widetilde{M}_n)=(0,0)\big)=\exp\big(-\frac{\nu}{2}-\frac{\nu^2}{4}\big)$.

Der Beweis zu Theorem 7.13 nutzt als Kriterium für Konvergenz gegen Poisson-Verteilungen Theorem 2.6. Als Plausibilitätsüberlegung zu (7.4.3): Für eine ZV $X\sim\mathrm{Poi}(\lambda)$ und $r\in\mathbb{N}$ ist

$$\mathbb{E}[(X)_r]=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=r}^{\infty}\frac{k!}{(k-r)!}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda^r\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=r}^{\infty}\frac{\lambda^{k-r}}{(k-r)!}=\lambda^r. \tag{3}$$

Zu Theorem 2.4: In Aufgabe 2.7 legt die folgende zusätzliche Voraussetzung nahe:

$$\forall k\in\mathbb{N}\colon\ \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{r=N\vee k}^{\infty}\frac{\mathbb{E}[(X_n)_r]}{(r-k)!}\xrightarrow{N\to\infty}0. \tag{4}$$

Damit folgt aus (2.1.13) für alle $\varepsilon>0$

$$\begin{aligned}\Big|\mathbb{P}(X_n=k)-\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\Big|&=\frac{1}{k!}\Big|\sum_{r=k}^{\infty}(-1)^{r-k}\frac{\mathbb{E}[(X_n)_r]}{(r-k)!}-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^j}{j!}\lambda^k\Big| &(5)\\ &\le\frac{1}{k!}\sum_{r=k}^{\infty}\frac{|\mathbb{E}[(X_n)_r]-\lambda^r|}{(r-k)!} &(6)\\ &\le\frac{1}{k!}\sum_{r=k}^{N}\frac{|\mathbb{E}[(X_n)_r]-\lambda^r|}{(r-k)!}+\varepsilon\xrightarrow{n\to\infty}\varepsilon, &(7)\end{aligned}$$

wobei $N\in\mathbb{N}$ mit Hilfe von (4) so groß gewählt wird, dass $\frac{1}{k!}\sum_{r=N+1}^{\infty}\frac{\mathbb{E}[(X_n)_r]}{(r-k)!}<\varepsilon/2$ und $\frac{1}{k!}\sum_{r=N+1}^{\infty}\frac{\lambda^r}{(r-k)!}<\varepsilon/2$ erfüllt sind. Weil die Zufallsvariablen X_n ganzzahlig sind, zeigt das schon die Konvergenz in Verteilung gegen $\mathrm{Poi}(\lambda)$. Bedingung (4) kann man bestimmt loswerden, denn die Konvergenz der faktoriellen Momente als Kriterium für Konvergenz in Verteilung sind eine Variante der Momentenmethode, siehe Theorem 2.3(d). Dort wird eine Wachstumsschranke an die Momente der Grenzverteilung vorausgesetzt, und für die Poisson-Verteilung ist sie erfüllt.

Theorem 2.4 ist [Bol11, Theorem 1.21] entnommen, aber den Beweis dort verstehe ich auch nicht. Die Bedingung (4) wird nicht geprüft, und es wird auch kein Ersatz angeboten. Theorem 2.4 ist aber korrekt, denn wir können es mit Hilfe von Theorem 2.3(d) beweisen.[1] Also: Wenn die faktoriellen Momente konvergieren, dann konvergieren auch die Momente, denn die r-te Faktorielle

$$\begin{aligned}(X)_r&=X(X-1)(X-2)\cdots(X-r+1) &(8)\\ &=X^r-\tfrac{1}{2}(r-1)(r-2)X^{r-1}+\cdots\pm(r-1)!X &(9)\end{aligned}$$

ist ein Polynom vom Grad r mit Leitkoeffizient 1. Das kann man ganz einfach nach X^r auflösen und erhält:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_n]&=\mathbb{E}[(X_n)_1]\to\lambda=\mathbb{E}[X] &(10)\\ \mathbb{E}[X_n^2]&=\mathbb{E}[(X_n)_2]+\mathbb{E}[(X)_1]\to\lambda^2+\lambda=\mathbb{E}[X^2] &(11)\\ \mathbb{E}[X_n^3]&=\mathbb{E}[(X_n)_3]+\cdots\to\lambda^3+\cdots=\mathbb{E}[X^3] &(12)\\ &\ \vdots &(13)\end{aligned}$$

Jetzt müssen wir nur noch überprüfen, ob $X\sim\mathrm{Poi}(\lambda)$ Bedingung (2.1.8) erfüllt. In der Bedingung wird über die Hadamard-Formel gefordert, dass die momentenerzeugende Funktion von X in 0 analytisch ist und einen positiven Konvergenzradius

[1] Ein sehr lesenswerter Beweis von Theorem 2.3(d) findet sich in [Bil95, Theorem 30.1, Theorem 30.2].

hat:

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX}] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X^r]}{r!} t^r < \infty \impliedby \frac{1}{t} < \limsup_{r\to\infty} \left(\frac{\mathbb{E}[X^r]}{r!}\right)^{1/r} \tag{14}$$

$$= \limsup_{r\to\infty} \left(\frac{\mathbb{E}[X^r]}{\sqrt{2\pi r}(r/\mathrm{e})^r}\right)^{1/r} \tag{15}$$

$$= \mathrm{e} \limsup_{r\to\infty} \frac{(\mathbb{E}[X^r])^{1/r}}{r}. \tag{16}$$

Das ist bei der Poisson-Verteilung der Fall, denn die momentenerzeugende Funktion ist

$$t \mapsto \mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX}] = \exp\bigl((\mathrm{e}^t - 1)\lambda\bigr) \tag{17}$$

und als Verkettung analytischer Funktionen selbst analytisch.

Wir wollen Theorem 2.6 aus Theorem 2.4 herleiten.

- Wenn die ZVn X, Y momentenerzeugende Funktionen haben, sind sie unabhängig genau dann wenn $M_{(X,Y)}(s,t) := \mathbb{E}[\exp(sX + tY)] = M_X(s)M_Y(t)$ für alle s, t aus einem kleinen Intervall um den Ursprung.
- Im Buch ist $0 \in \mathbb{N}$, also impliziert (2.1.17) $X_{j,n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{Poi}(\lambda_j)$ nach Theorem 2.4.
- Die gemeinsamen faktoriellen Momente von $(X_{1,n}, \ldots, X_{d,n})$ konvergieren gegen die eines Vektors mit unabhängigen Komponenten. Das bedeutet, dass die momentenerzeugende Funktion des Vektors $(X_{1,n}, \ldots, X_{d,n})$ konvergiert, und zwar gegen die momentenerzeugende Funktion von $\bigotimes_{j\in[d]} \mathrm{Poi}(\lambda_j)$.

—

Theorem 2.5 beruht darauf, dass die untere Faktorielle der Summe der Indikatoren beim Ausmultiplizieren folgenden Effekt zeigt:

$$(X)_r = \sum_{i\in\mathcal{I}} I_i (X-1)_{r-1} = \sum_{i\in\mathcal{I}} I_i (X - I_i)_{r-1} = \sum_{i\in\mathcal{I}} I_i \Bigl(\sum_{j\in\mathcal{I}\setminus\{i\}} I_j\Bigr)_{r-1}. \tag{18}$$

Das kann man in der Induktion ausnutzen. Theorem 2.7 kann man direkt auf Theorem 2.5 zurückführen:

$$\mathbb{E}[(X)_a (Y)_b] = \mathbb{E}\bigl[(X)_a \, \mathbb{E}[(Y)_b \mid X]\bigr] \tag{19}$$

$$\overset{\text{Thm. 2.5}}{=} \mathbb{E}\Bigl[(X)_a \sum_{j_1,\ldots,j_b\in\mathcal{I}}^{*} \mathbb{E}\Bigl[\prod_{\ell=1}^{b} I_{j_\ell} \Bigm| X\Bigr]\Bigr] \tag{20}$$

$$= \sum_{j_1,\ldots,j_b\in\mathcal{I}}^{*} \mathbb{E}\Bigl[(X)_a \prod_{\ell=1}^{b} I_{j_\ell}\Bigr] \tag{21}$$

$$= \sum_{j_1,\ldots,j_b\in\mathcal{I}}^{*} \mathbb{E}\Bigl[(X)_a \frac{\prod_{\ell=1}^{b} I_{j_\ell}}{\mathbb{E}\bigl[\prod_{\ell=1}^{b} I_{j_\ell}\bigr]}\Bigr] \, \mathbb{E}\Bigl[\prod_{\ell=1}^{b} I_{j_\ell}\Bigr] \tag{22}$$

$$\tag{23}$$

Wir verwenden den Bruch als Dichte und wenden Theorem 2.5 für $(X)_a$ mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}' := \frac{\prod_{\ell=1}^{b} I_{j_\ell}}{\mathbb{E}\bigl[\prod_{\ell=1}^{b} I_{j_\ell}\bigr]}\mathbb{P}$ und dem dazugehörigen Erwartungswert $\mathbb{E}'$ an:

$$\mathbb{E}[(X)_a(Y)_b] = \sum_{j_1,\dots,j_b\in\mathcal{I}}^{*} \mathbb{E}'\big[(X)_a\big]\,\mathbb{E}\Big[\prod_{\ell=1}^{b} I_{j_\ell}\Big] \tag{24}$$

$$\overset{\text{Thm. 2.5}}{=} \sum_{j_1,\dots,j_b\in\mathcal{I}}^{*}\sum_{i_1,\dots,i_a\in\mathcal{I}}^{*} \mathbb{E}'\Big[\prod_{\ell=1}^{a} I_{i_\ell}\Big]\,\mathbb{E}\Big[\prod_{\ell=1}^{b} I_{j_\ell}\Big] \tag{25}$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_a\in\mathcal{I}}^{*}\sum_{j_1,\dots,j_b\in\mathcal{I}}^{*} \mathbb{E}\Big[\prod_{\ell=1}^{a} I_{i_\ell}\frac{\prod_{\ell=1}^{b} I_{j_\ell}}{\mathbb{E}[\prod_{\ell=1}^{b} I_{j_\ell}]}\Big]\,\mathbb{E}\Big[\prod_{\ell=1}^{b} I_{j_\ell}\Big] \tag{26}$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_a\in\mathcal{I}}^{*}\sum_{j_1,\dots,j_b\in\mathcal{I}}^{*} \mathbb{E}\Big[\prod_{\ell=1}^{a} I_{i_\ell}\prod_{\ell=1}^{b} I_{j_\ell}\Big]. \tag{27}$$

In den Corrigenda stehen fast zwei Seiten Ergänzung zum Beweis von Theorem 7.13.

Proposition 7.14 zeigt, dass die Voraussetzungen 7.8(a)–(c) notwendig sind und beweist, dass im Fall $\mathbb{E}[D^2] = \infty$ gilt:

$$\mathbb{P}(\mathrm{CM}_n(\mathbf{d}) \text{ ist einfach}) \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{28}$$

Die Intuition ist hier: Wenn die Knotengradverteilung keine Varianz hat, dann gibt es Knoten mit extrem großem Grad. Diese Knoten haben so viele halbe Kanten im Spiel, dass sie sich mit großer Wahrscheinlichkeit mit sich selbst oder mehrfach mit anderen Knoten mit großem Grad verbinden. Der Beweis erweitert den von Theorem 7.14 um eine Abschneideschwelle K, die am Ende gegen ∞ geschickt wird.

2 Uniforme einfache Graphen und der GRG

In Korollar 7.17 und Theorem 7.18 muss $\mathcal{E}_n$ eine Mengen von Multigraphen mit Knotenmenge $[n]$ sein. Enthielte $\mathcal{E}_n$ tatsächlich nur einfache Graphen, ließe sich die Voraussetzung praktisch nicht erfüllen: Nach Theorem 7.12 wäre mit $\nu := \frac{\mathbb{E}[D(D-1)]}{\mathbb{E}[D]}$

$$\mathbb{P}(\mathrm{CM}_n(\mathbf{d}) \in \mathcal{E}_n) \le \mathbb{P}(\mathrm{CM}_n(\mathbf{d}) \text{ einfach}) \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\nu}{2}-\frac{\nu^2}{4}} < 1, \tag{29}$$

es sei denn $\nu = 0$, und dann müsste fast sicher $D \in \{0, 1\}$ sein, und das ist dann kein interessanter zufälliger Graph mehr.

—

Theorem 7.19 formalisiert die Beziehungen zwischen Bedingung 6.4(a)–(c) für den GRG und Bedingung 7.8(a)–(c) für das Konfigurationsmodell. Der Beweis wird mit dem Chung-Lu-Modell geführt, vermutlich ist er alt und in dem Modell als erstes geführt worden.

Warum genügt (7.5.11)? — Wenn (7.5.11) nachgerechnet ist, beenden wir den Beweis mit

$$\frac{1}{n}\sum_{i\in[n]} d_i^2 = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i\in[n]} d_i}_{=\mathbb{E}[W_n]} + \frac{1}{n}\sum_{i\in[n]} d_i(d_i-1) \tag{30}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}[W] + \mathbb{E}[W^2] \tag{31}$$

$$= \mathbb{E}[D] + \mathbb{E}[D(D-1)] = \mathbb{E}[D^2]. \tag{32}$$

Dabei benutzen wir, dass wegen $D \sim \mathrm{Poi}(W)$:

$$\mathbb{E}[D] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[D \mid W]\big] = \mathbb{E}[W] \tag{33}$$

und nach (3)

$$\mathbb{E}[D(D-1)] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[D(D-1) \mid W]\big] = \mathbb{E}[W^2]. \tag{34}$$

In (7.5.12) passiert was ganz ähnliches wie in (18):

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in[n]} d_i(d_i-1) &= \sum_{i\in[n]} \sum_{j\in[n]\setminus\{i\}} I_{ij}\Big(-1 + \sum\nolimits_{k\in[n]\setminus\{i\}} I_{ik}\Big) && (35)\\
&= \sum_{i\in[n]} \sum_{j\in[n]\setminus\{i\}} I_{ij}\Big(-I_{ij} + \sum\nolimits_{k\in[n]\setminus\{i\}} I_{ik}\Big) && (36)\\
&= \sum_{i\in[n]} \sum_{j\in[n]\setminus\{i\}} I_{ij} \sum_{k\in[n]\setminus\{i,j\}} I_{ik} && (37)\\
&= \sum_{i\in[n]} \sum_{j\in[n]\setminus\{i\}} \sum_{k\in[n]\setminus\{i,j\}} I_{ij} I_{ik} && (38)
\end{aligned}$$

So lassen wir das mal, denn in (7.5.13) müssen wir alles, was wir jetzt noch schöner verpacken, wieder auspacken:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\frac{1}{n}\sum\nolimits_{i\in[n]} d_i(d_i-1)\Big] &= \frac{1}{n}\sum_{i\in[n]} \sum_{j\in[n]\setminus\{i\}} \sum_{k\in[n]\setminus\{i,j\}} \mathbb{E}[I_{ik}I_{ij}] && (39)\\
&\overset{\text{Unabh.}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i\in[n]} \sum_{j\in[n]\setminus\{i\}} \sum_{k\in[n]\setminus\{i,j\}} \mathbb{E}[I_{ik}]\,\mathbb{E}[I_{ij}] && (40)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i\in[n]} \sum_{j\in[n]\setminus\{i\}} \sum_{k\in[n]\setminus\{i,j\}} \frac{w_iw_j}{\ell_n}\frac{w_iw_k}{\ell_n} && (41)
\end{aligned}$$

Ab jetzt benutzen wir $\ell_n = \sum_{i\in[n]} w_i$ und $\max_{i\in[n]} w_i = o(\sqrt{n})$ und weichen etwas von der Vorlage ab:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\frac{1}{n}\sum\nolimits_{i\in[n]} d_i(d_i-1)\Big] && (42)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i\in[n]} w_i^2 \sum_{j\in[n]\setminus\{i\}} \frac{w_j}{\ell_n} \underbrace{\sum_{k\in[n]\setminus\{i,j\}} \frac{w_k}{\ell_n}}_{=1-\frac{w_i+w_j}{\ell_n}} && (43)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i\in[n]} w_i^2 \underbrace{\sum_{j\in[n]\setminus\{i\}} \frac{w_j}{\ell_n}}_{=1-\frac{w_i}{\ell_n}} - \frac{1}{n}\sum_{i\in[n]} w_i^2 \sum_{j\in[n]\setminus\{i\}} \frac{w_j}{\ell_n}\frac{w_i+w_j}{\ell_n} && (44)\\
&= \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i\in[n]} w_i^2}_{=\mathbb{E}[W_n^2]} - \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i\in[n]} w_i^2\frac{w_i}{\ell_n}}_{\le\frac{o(n)}{n}\to 0} - \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{i\in[n]} w_i\frac{w_i}{\ell_n}}_{\le o(\sqrt{n})}\underbrace{\sum_{j\in[n]\setminus\{i\}} \frac{w_j}{\ell_n}(w_i+w_j)}_{\le 2o(\sqrt{n})} && (45)\\
&\xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}[W^2]. && (46)
\end{aligned}$$

Die letzte Summe in (7.5.15) muss lauten:

$$\sum_{i,j,k,l\in[n]} p_{ij}p_{jk}p_{kl}. \tag{47}$$

3 Zufällige Knotengrade

Kapitel 7.6 ist zu schwer und muss daher leider entfallen.

4 Zufällige Knotengewichte im GRG

Problem Nr. 1: Bedingung 6.4(a) besteht eigentlich aus überabzählbar vielen Bedingungen:

$$\forall x \in C(F)\colon \lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x), \tag{48}$$

wobei $C(F)$ die Menge der Stetigkeitspunkte von $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ ist. Überabzählbar viele Bedingungen vertragen sich nicht so gut mit Maßen. — Der Ausweg: Verwende den Lévy-Abstand

$$d_{\mathrm{L}}(F,G) := \inf\{\varepsilon > 0\colon \forall x \in \mathbb{R}\colon F(x-\varepsilon) - \varepsilon \le G(x) \le F(x+\varepsilon) + \varepsilon\} \tag{49}$$

zwischen zwei Verteilungsfunktionen $F, G\colon \mathbb{R} \to [0,1]$. Es gilt nämlich: Verteilungsfunktionen $F_n, F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ erfüllen (48) genau dann wenn

$$d_{\mathrm{L}}(F_n, F) \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{50}$$

Beweis. Zunächst die Rückrichtung: Sei $x \in C(F)$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$ so dass

$$F([x-\delta, x+\delta]) \subseteq (F(x) - \tfrac{\varepsilon}{2}, F(x) + \tfrac{\varepsilon}{2}). \tag{51}$$

Wähle nun $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass für alle $n \ge N$ gilt

$$d_{\mathrm{L}}(F_n, F) < \delta. \tag{52}$$

Dann erhalten wir für alle $n \ge N$

$$\begin{aligned} F_n(x) - F(x) &\le F(x+\delta) + \delta - F(x) && (53)\\ &\le F(x) + \tfrac{\varepsilon}{2} + \delta - F(x) && (54)\\ &< \varepsilon && (55) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F_n(x) - F(x) &\ge F(x-\delta) - \delta - F(x) && (56)\\ &\ge F(x) - \tfrac{\varepsilon}{2} - \delta - F(x) && (57)\\ &> -\varepsilon. && (58) \end{aligned}$$

Das zeigt die Rückrichtung. Die Vorwärtsrichtung ist etwas länger. Sei wieder $\varepsilon > 0$. Wir setzen $z_0 := -\infty$, $z_{k+1} := +\infty$ und wählen $z_1 < z_2 < \cdots < z_k \in \mathbb{R}$ so dass für alle $j \in \{0, \ldots, k\}$

$$F(z_{j+1}^-) - F(z_j) < \tfrac{\varepsilon}{2}. \tag{59}$$

Dabei soll $F(-\infty) = 0$ und $F(+\infty) = 1$ sein. Dann wählen wir $x_0 := -\infty$, $y_k := +\infty$ und

$$\begin{aligned} &x_j \in (z_j, z_{j+1}) \cap (z_j, z_j + \tfrac{\varepsilon}{2}) \cap C(F) && (j \in \{1, \ldots, k\}), && (60)\\ &y_j \in (x_j, z_{j+1}) \cap (z_{j+1} - \tfrac{\varepsilon}{2}, z_{j+1}) \cap C(F) && (j \in \{0, \ldots, k-1\}). && (61) \end{aligned}$$

Das geht, weil die Stetigkeitsstellen von F dicht in $\mathbb{R}$ sind. Dann wählen wir $N \in \mathbb{N}$

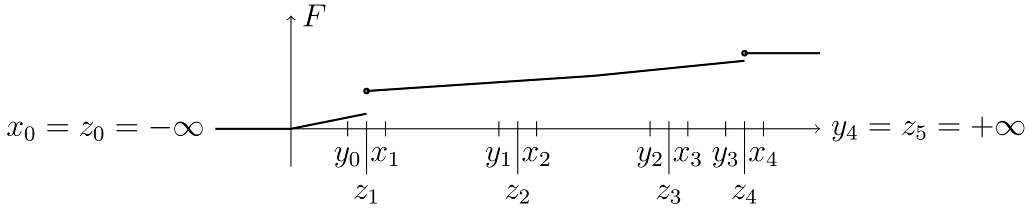

Abbildung 1: Mögliche Anordnung der Stützstellen mit $k = 4$.

so groß, dass für alle $n \geq N$ und alle $j \in \{0, \dots, k\}$ schon

$$|F_n(x_j) - F(x_j)| < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |F_n(y_j) - F(y_j)| < \tfrac{\varepsilon}{2} \tag{62}$$

erfüllt sind. Durch diese Konstruktion ist garantiert, dass für alle $j \in \{0, \dots, k\}$:

$$0 \leq F(y_j) - F(x_j) \leq F(z_{j+1}^-) - F(z_j) < \tfrac{\varepsilon}{2}. \tag{63}$$

Wir rechnen jetzt nach, dass für alle $n \geq N$

$$d_{\mathrm{L}}(F_n, F) < \varepsilon. \tag{64}$$

Zunächst sei $x \in [x_j, y_j]$ für ein $j \in \{0, \dots, k\}$. Dann ist

$$F_n(x) \leq F_n(y_j) < F(y_j) + \tfrac{\varepsilon}{2} < F(x_j) + \varepsilon \leq F(x + \varepsilon) + \varepsilon \tag{65}$$

und

$$F_n(x) \geq F_n(x_j) > F(x_j) - \tfrac{\varepsilon}{2} > F(y_j) - \varepsilon \geq F(x - \varepsilon) - \varepsilon. \tag{66}$$

Für alle $x \in [y_j, x_{j+1}]$ für ein $j \in \{0, \dots, k-1\}$ bemerken wir zunächst $x_{j+1} - y_j < \varepsilon$. Damit ist dann

$$F_n(x) \leq F_n(x_{j+1}) < F(x_{j+1}) + \tfrac{\varepsilon}{2} < F(x + \varepsilon) + \varepsilon \tag{67}$$

und

$$F_n(x) \geq F_n(y_j) > F(y_j) - \tfrac{\varepsilon}{2} > F(x - \varepsilon) - \varepsilon. \tag{68}$$

Das zeigt (64). □

Das heißt: Gleichung (50) ist äquivalent zu Bedingung 6.4(a). Weil wir für jedes $\varepsilon > 0$ die Konvergenz aus (48) nur an endlich vielen Stellen benutzt haben, können wir die probabilistische Version dieser Bedingung so formulieren:

$$d_{\mathrm{L}}(F_n, F) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} 0, \tag{69}$$

wobei jetzt $F_n(x) := \mathbb{P}_n(W_n \leq x)$.

Beweis. Seien $\varepsilon, \kappa > 0$. Mit der Konstruktion von oben wählen wir $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$\mathbb{P}\big(|F_n(x_j) - F(x_j)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\big) < \frac{\kappa}{2k} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\big(|F_n(y_j) - F(y_j)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\big) < \frac{\kappa}{2k}. \tag{70}$$

Mit Subadditivität folgt

$$\mathbb{P}\big(\exists j \in \{0, \dots, k\} \colon |F_n(x_j) - F(x_j)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ oder } |F_n(y_j) - F(y_j)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\big) < \kappa. \tag{71}$$

Außerdem ist auf dem Komplement dieser Vereinigung nach obiger Rechnung

$$\{\forall j \in \{0,\dots,k\}\colon |F_n(x_j) - F(x_j)| < \tfrac{\varepsilon}{2}, |F_n(y_j) - F(y_j)| < \tfrac{\varepsilon}{2}\} \\ \subseteq \{d_{\mathrm{L}}(F_n, F) < \varepsilon\}. \tag{72}$$

Das bedeutet: Für alle $n \geq N$ haben wir

$$\mathbb{P}\big(d_{\mathrm{L}}(F_n, F) \geq \varepsilon\big) < \kappa \tag{73}$$

bewiesen. Das war zu zeigen, denn jetzt ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(d_{\mathrm{L}}(F_n, F) \geq \varepsilon\big) = 0. \tag{74}$$

Die Rückrichtung ist wieder einfacher. Seien $x \in C(F)$ und $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta_0 > 0$ so klein, dass für alle $\delta \in [-\delta_0, \delta_0]$

$$|F(x+\delta) + \delta - F(x)| < \varepsilon \tag{75}$$

erfüllt ist. Daraus erhalten wir sofort

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\big(|F_n(x) - F(x)| \geq \varepsilon\big) && (76)\\ &\leq \mathbb{P}\big(\forall \delta \in \{-\delta_0, \delta_0\}\colon |F_n(x) - (F(x+\delta)+\delta)| > 0\big) && (77)\\ &\leq \mathbb{P}\big(d_{\mathrm{L}}(F_n, F) \geq \delta_0\big) \xrightarrow{n\to\infty} 0, && (78) \end{aligned}$$

denn in (77) liegt entweder $F_n(x) \geq F(x+\delta_0) + \delta_0$ oder $F_n(x) \leq F(x-\delta_0) - \delta_0$ vor, was beides $d_{\mathrm{L}}(F_n, F) \geq \delta_0$ impliziert. □

Wir wollen diese Formulierung von Bedingung 6.4(a) nutzen, um Aufgabe 6.3 für zufällige Knotengewichte zu lösen. Indem wir auf $(w_i)_{i\in[n]}$ bedingen, können wir den deterministischen Teil dieser Aufgabe wiederverwerten und erhalten direkt

$$d_{\mathrm{L}}(F_n, F) \to 0,\ \mathbb{E}_n[W_n] \to \mathbb{E}[W] \in (0,\infty) \implies n^{-1}\max_{i\in[n]} w_i \to 0. \tag{79}$$

Wenn wir die Limiten ausschreiben, liest sich das so: Unter der Voraussetzung $\mathbb{E}[W] \in (0,\infty)$ gilt

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon d_{\mathrm{L}}(F_n, F) < \delta,\ \big|\mathbb{E}_n[W_n] - \mathbb{E}[W]\big| < \delta \implies n^{-1}\max_{i\in[n]} w_i < \varepsilon. \tag{80}$$

Wir wollen nun zeigen:

$$d_{\mathrm{L}}(F_n, F) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,\ \mathbb{E}_n[W_n] \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[W] \in (0,\infty) \implies n^{-1}\max_{i\in[n]} w_i \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \tag{81}$$

Sei dafür $\varepsilon, \kappa > 0$. Wir wählen $\delta > 0$ passend zu ε nach (80). Weiter soll $N \in \mathbb{N}$ so groß sein, dass für alle $n \geq N$

$$\mathbb{P}\big(d_{\mathrm{L}}(F_n, F) \geq \delta\big) < \tfrac{\kappa}{2} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\big(\big|\mathbb{E}_n[W_n] - \mathbb{E}[W]\big| \geq \delta\big) < \tfrac{\kappa}{2} \tag{82}$$

gilt. Wir erhalten

$$\mathbb{P}\big(n^{-1}\max_{i\in[n]} w_i \geq \varepsilon\big) \leq \mathbb{P}\big(d_{\mathrm{L}}(F_n, F) \geq \delta\big) + \mathbb{P}\big(\big|\mathbb{E}_n[W_n] - \mathbb{E}[W]\big| \geq \delta\big) < \kappa, \tag{83}$$

und das zeigt (81). Dieses Beweisschema lässt sich leicht auf

$$\left.\begin{aligned} d_{\mathrm{L}}(F_n, F) &\xrightarrow{\mathbb{P}} 0\\ \mathbb{E}_n[W_n] &\xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[W] \in (0,\infty)\\ \mathbb{E}[W_n^2] &\xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[W^2] \in (0,\infty) \end{aligned}\right\} \implies n^{-1/2}\max_{i\in[n]} w_i \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \tag{84}$$

und Theorem 6.6:

$$\left.\begin{aligned} d_{\mathrm{L}}(F_n, F) &\xrightarrow{\mathbb{P}} 0\\ \mathbb{E}_n[W_n] &\xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[W] \in (0,\infty] \end{aligned}\right\} \implies n^{-1}E(\mathrm{GRG}_n(\mathbf{w})) \xrightarrow{\mathbb{P}} \tfrac{1}{2}\,\mathbb{E}[W] \tag{85}$$

übertragen.

Literatur

[Bil95] P. Billingsley. *Probability and Measure*. Englisch. 3. Aufl. Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Inc., 1995. ISBN: 0-471-00710-2. DOI: 10.1002/9780470316962 (siehe S. 2).

[Bol11] B. Bollobás. *Random Graphs*. Englisch. 2. Aufl. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 73. Cambridge University Press, 2011. DOI: 10.1017/CBO9780511814068 (siehe S. 2).

[Hof17] R. van der Hofstad. *Random Graphs and Complex Networks*. Englisch. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics 43. Corrigenda: https://www.win.tue.nl/~rhofstad/CorrigendaNotesRGCN.pdf. Cambridge University Press, 2017. ISBN: 978-1-107-17287-6. DOI: 10.1017/9781316779422. URL: https://www.win.tue.nl/~rhofstad/NotesRGCN.pdf (besucht am 30. 06. 2020).