

Zufällige Graphen

Christoph Schumacher

02. Juli 2020

RGCN I, Kap. 7.7, 7.8:
Das Konfigurationsmodell Teil III

Zusammenfassung

Details zur Gradstruktur, Transfer vom Konfigurationsmodell zum GRG, Größenverzerrte Verteilungen, Ausblick: Erweiterungen des Konfigurationsmodells

Inhaltsverzeichnis

1	Anwendung des pairing schemes	1
1.1	Asymptotische Nachbargrade	1
1.2	Grade an zufälligen Kanten	3
1.3	Theorem 7.25 für zufällige Gradfolgen	4
2	Transfer vom CM zum GRG	5
3	Größenverzerrte Verteilungen reloaded	5
3.1	Größenverzerrte Erwartungswerte	6
3.2	Größenverzerrte mixed Poisson-Verteilung	6
4	Varianten des Konfigurationsmodells	7
4.1	Das hierarchische Konfigurationsmodell	7
4.2	Das Konfigurationsmodell mit Clustern	7
4.3	Das gerichtete Konfigurationsmodell	7

Fragen

1. —

1 Anwendung des pairing schemes

zur Konstruktion von B_n^* und gleichverteilter Kanten im Beweis von Theorem 7.25:

1.1 Asymptotische Nachbargrade

Der Plan ist: Wir realisieren $CM_n(\mathbf{d})$ mit Hilfe eines uniform adaptable pairing scheme, siehe Definition 7.5, und koppeln die Konstruktion von V_1 und V_2 daran, so dass wir B_n^* ziemlich früh im Schema ablesen können.

Die erste Halbkante x_1 wählen wir folgendermaßen aus: Zunächst wählen wir einen Knoten $V_1 \sim \mathcal{U}([n])$:

$$\mathbb{P}(V_1 = i) = \frac{1}{n}. \quad (1)$$

Dann wählen wir bedingt auf V_1 eine Halbkante $x_1 = (V_1, s) \sim \mathcal{U}([d_{V_1}])$:

$$\mathbb{P}(x_1 = (V_1, s) \mid V_1) = \frac{1}{d_{V_1}}. \quad (2)$$

Das bedeutet für $i \in [n]$ und $s \in [d_i]$:

$$\mathbb{P}(x_1 = (i, s)) = \mathbb{P}(x_1 = (i, s) \mid V_1 = i) \mathbb{P}(V_1 = i) = \frac{1}{d_i} \cdot \frac{1}{n}. \quad (3)$$

Die Halbkante y_1 , die mit x_1 gepaart wird, muss uniform unter allen noch verfügbaren halben Kanten gewählt werden: Für alle $j \in [n]$ und

$$t \in \begin{cases} [d_i] \setminus \{s\} & j = i \\ [d_j] & j \neq i \end{cases} \quad (4)$$

sei

$$\mathbb{P}(y_1 = (j, t) \mid x_1 = (i, s)) = \frac{1}{\ell_n - 1}. \quad (5)$$

Wir koppeln nun die Konstruktion des Multigraphen $\text{CM}_n(\mathbf{d})$ und V_2 , indem wir V_2 als den Knoten der Halbkante y_1 wählen. Weil wir die Halbkante s aus den Halbkanten an V_1 uniform ausgewählt haben, ist V_2 ein uniform gewählter Nachbar von V_1 und die Marginalverteilung stimmt. Der Rest des pairing schemes interessiert uns derzeit nicht.

Beim Kollabieren der Konfiguration zum Multigraph werden d_j Halbkanten zum Knoten j zusammengefasst. Damit ist für alle $j \in [n]$:

$$\mathbb{P}(V_2 = j \mid x_1 = (i, s)) = \begin{cases} \frac{d_i - 1}{\ell_n - 1} & \text{wenn } j = i, \\ \frac{d_j}{\ell_n - 1} & \text{wenn } j \neq i \end{cases} \quad (6)$$

$$= \frac{d_i - 1}{\ell_n - 1} \mathbf{1}_{\{i\}}(j) + \frac{d_j}{\ell_n - 1} \mathbf{1}_{[n] \setminus \{i\}}(j). \quad (7)$$

In dieser Formel kommt s nur noch in der Bedingung vor. Das heißt, wir können s aus der Bedingung eliminieren:

$$\mathbb{P}(V_2 = j \mid V_1 = i) = \sum_{s \in [d_i]} \mathbb{P}(V_2 = j \mid \underbrace{x_1 = (i, s), V_1 = i}_{=\{x_1=(i,s)\}}) \underbrace{\mathbb{P}(x_1 = (i, s) \mid V_1 = i)}_{\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{d_i}} \quad (8)$$

$$= \frac{d_i - 1}{\ell_n - 1} \mathbf{1}_{\{i\}}(j) + \frac{d_j}{\ell_n - 1} \mathbf{1}_{[n] \setminus \{i\}}(j). \quad (9)$$

Wir steigen in den Beweis von Theorem 7.25 ein und kümmern wir uns um $B_n^* = d_{V_2}$. Für $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\mathbb{P}(B_n^* = k) = \sum_{j \in [n]} \mathbb{P}(B_n^* = k \mid V_2 = j) \mathbb{P}(V_2 = j) \quad (10)$$

$$= \sum_{j \in [n]} \mathbb{P}(d_{V_2} = k \mid V_2 = j) \sum_{i \in [n]} \mathbb{P}(V_2 = j \mid V_1 = i) \mathbb{P}(V_1 = i) \quad (11)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j \in [n]} \mathbf{1}_{\{k\}}(d_j) \sum_{i \in [n]} \left(\frac{d_i - 1}{\ell_n - 1} \mathbf{1}_{\{i\}}(j) + \frac{d_j}{\ell_n - 1} \mathbf{1}_{[n] \setminus \{i\}}(j) \right) \quad (12)$$

$$= \frac{k - 1}{\ell_n - 1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i \in [n]} \mathbf{1}_{\{k\}}(d_i) + \frac{k}{\ell_n - 1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i, j \in [n]: i \neq j} \mathbf{1}_{\{k\}}(d_j) \quad (7.7.3)$$

Wir verwenden nun die Definition von D_n und Bedingungen 7.8(a)–(b):

$$\mathbb{P}(B_n^* = k) = \frac{k-1}{\ell_n-1} \mathbb{P}(D_n = k) + \frac{k}{\ell_n-1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i \in [n]} \left(-\mathbf{1}_{\{k\}}(d_i) + \sum_{j \in [n]} \mathbf{1}_{\{k\}}(d_j) \right) \quad (13)$$

$$= \frac{-1}{\ell_n-1} \mathbb{P}(D_n = k) + \frac{k}{\ell_n-1} \sum_{i \in [n]} \mathbb{P}(D_n = k) \quad (14)$$

$$= \frac{k\ell_n-1}{n\mathbb{E}[D_n]-1} \mathbb{P}(D_n = k) = \frac{k-\frac{1}{n}}{\mathbb{E}[D_n]-\frac{1}{n}} \mathbb{P}(D_n = k) \quad (15)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{k}{\mathbb{E}[D]} \mathbb{P}(D = k) = \mathbb{P}(D^* = k). \quad (7.4.4)$$

1.2 Grade an zufälligen Kanten

Die (gerichtete) Kante e ist uniform verteilt auf der zufälligen Menge der (gerichteten) Kanten E des Multigraphs auf $[n]$ mit Gradfolge \mathbf{d} : Für alle $e_0 \in \{(st, ij) : i, j \in [n], s \in [d_i], t \in [d_j]\}$ ist

$$\mathbb{P}(e = e_0 \mid e_0 \in E) = \frac{1}{|E|} = \frac{1}{\ell_n} \quad (16)$$

bzw.

$$\mathbb{P}(e = e_0 \mid E) = \frac{1}{\ell_n} \mathbf{1}_E(e_0). \quad (17)$$

Wir bestimmen $\mathbb{P}(e_0 \in E)$ für $e_0 = (st, ij)$ mit Hilfe der Kopplung an die Konstruktion des $\text{CM}_n(\mathbf{d})$. Dazu wählen wir (fast sicher) im pairing scheme $x_1 = (i, s)$ und sehen, dass

$$\mathbb{P}(e_0 \in E) = \mathbb{P}(y_1 = (j, t) \mid x_1 = (i, s)) \mathbb{P}(x_1 = (i, s)) = \frac{1}{\ell_n-1}. \quad (18)$$

Damit ist

$$\mathbb{P}(e = e_0) = \mathbb{P}(e = e_0 \mid e_0 \in E) \mathbb{P}(e_0 \in E) + 0 \cdot \mathbb{P}(e_0 \notin E) \quad (19)$$

$$= \frac{1}{\ell_n} \frac{1}{\ell_n-1}. \quad (20)$$

Diese Formel lässt sich so lesen: Die beiden Halbkanten werden uniform und ohne Zurücklegen gezogen.

Wir fassen die Halbkanten zu Knoten zusammen. Die Endpunkte der zufälligen Kante e nennen wir V_1 und V_2 . Für $i \neq j \in [n]$ ist

$$\mathbb{P}((V_1, V_2) = (i, j)) = \sum_{e_0} \underbrace{\mathbb{P}((V_1, V_2) = (i, j) \mid e = e_0)}_{=\mathbf{1}_{\{(st, ij) : s \in [d_i], t \in [d_j]\}}(e_0)} \mathbb{P}(e = e_0) \quad (21)$$

$$= \sum_{s \in [d_i], t \in [d_j]} \frac{1}{\ell_n} \frac{1}{\ell_n-1} = \frac{d_i d_j}{\ell_n(\ell_n-1)}. \quad (22)$$

Für $i = j \in [n]$ erhalten wir dagegen

$$\mathbb{P}((V_1, V_2) = (i, i)) = \sum_{e_0} \underbrace{\mathbb{P}((V_1, V_2) = (i, i) \mid e = e_0)}_{=\mathbf{1}_{\{(st, ii) : s \neq t \in [d_i]\}}(e_0)} \mathbb{P}(e = e_0) \quad (23)$$

$$= \sum_{s \neq t \in [d_i]} \frac{1}{\ell_n} \frac{1}{\ell_n-1} = \frac{d_i(d_i-1)}{\ell_n(\ell_n-1)}. \quad (24)$$

Das können wir mit dem Kronecker-Delta $\delta_{i,j} := \mathbf{1}_{\{i\}}(j)$ zusammenfassen:

$$\mathbb{P}((V_1, V_2) = (i, j)) = \frac{d_i(d_j - \delta_{i,j})}{\ell_n(\ell_n - 1)}. \quad (25)$$

Damit sehen wir $(D_{n,1}^*, D_{n,2}^*) = (d_{V_1}, d_{V_2})$ an. Für alle $(k_1, k_2) \in \mathbb{N}_0^2$ haben wir

$$\mathbb{P}((D_{n,1}^*, D_{n,2}^*) = (k_1, k_2)) \quad (26)$$

$$= \sum_{i,j \in [n]} \mathbb{P}((d_{V_1}, d_{V_2}) = (k_1, k_2) \mid (V_1, V_2) = (i, j)) \mathbb{P}((V_1, V_2) = (i, j)) \quad (27)$$

$$= \sum_{i,j \in [n]} \mathbf{1}_{\{(k_1, k_2)\}}(d_i, d_j) \frac{d_i(d_j - \delta_{i,j})}{\ell_n(\ell_n - 1)} \quad (28)$$

$$= \sum_{i,j \in [n]} \mathbf{1}_{\{k_1\}}(d_i) \mathbf{1}_{\{k_2\}}(d_j) \frac{k_1 k_2}{\ell_n(\ell_n - 1)} - \sum_{i,j \in [n]} \mathbf{1}_{\{k_1\}}(d_i) \mathbf{1}_{\{k_2\}}(d_j) \frac{k_1 \delta_{i,j}}{\ell_n(\ell_n - 1)} \quad (29)$$

$$= \frac{k_1 k_2}{\mathbb{E}[D_n](\mathbb{E}[D_n] - \frac{1}{n})} \frac{1}{n} \sum_{i \in [n]} \mathbf{1}_{\{k_1\}}(d_i) \frac{1}{n} \sum_{j \in [n]} \mathbf{1}_{\{k_2\}}(d_j) - \frac{k_1 \delta_{k_1, k_2}}{\mathbb{E}[D_n](\ell_n - 1)} \frac{1}{n} \sum_{i \in [n]} \mathbf{1}_{\{k_1\}}(d_i) \quad (30)$$

$$= \frac{k_1 k_2}{\mathbb{E}[D_n](\mathbb{E}[D_n] - \frac{1}{n})} \mathbb{P}(D_n = k_1) \mathbb{P}(D_n = k_2) - \frac{k_1 \delta_{k_1, k_2}}{\mathbb{E}[D_n](\ell_n - 1)} \mathbb{P}(D_n = k_1) \quad (31)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{k_1 k_2}{(\mathbb{E}[D])^2} \mathbb{P}(D = k_1) \mathbb{P}(D = k_2) = \mathbb{P}(D^* = k_1) \mathbb{P}(D^* = k_2). \quad (7.7.6)$$

1.3 Theorem 7.25 für zufällige Gradfolgen

Theorem 7.25 gilt auch für zufällige Gradfolgen \mathbf{d} . Mit der Notation $d_L(X, Y) := d_L(F_X, F_Y)$ für zwei ZVN X, Y mit Verteilungsfunktionen F_X, F_Y haben wir gerade gezeigt:

$$\left. \begin{array}{l} d_L(D_n, D) \rightarrow 0, \\ \mathbb{E}[D_n] \rightarrow \mathbb{E}[D] \end{array} \right\} \implies d_L(B_n^*, D^*) \rightarrow 0 \quad (32)$$

bzw. ohne Limiten:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \left\{ \begin{array}{l} d_L(D_n, D) < \delta, \\ |\mathbb{E}[D_n] - \mathbb{E}[D]| < \delta \end{array} \right\} \implies d_L(B_n^*, D^*) < \varepsilon. \quad (33)$$

Seien nun $\varepsilon, \kappa > 0$. Wir wählen $\delta > 0$ gemäß (33) und $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass für alle $n \geq N$

$$\mathbb{P}(d_L(D_n, D) \geq \delta) < \frac{\kappa}{2} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(|\mathbb{E}[D_n] - \mathbb{E}[D]| \geq \delta) < \frac{\kappa}{2} \quad (34)$$

erfüllt ist. Dann ist

$$\mathbb{P}(d_L(B_n^*, D^*) \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(d_L(D_n, D) \geq \delta) + \mathbb{P}(|\mathbb{E}[D_n] - \mathbb{E}[D]| \geq \delta) < \kappa. \quad (35)$$

Für die zweite Aussage mit $(D_{n,1}^*, D_{n,2}^*)$ kann man die Bijektion $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$

$$(x, y) \mapsto \binom{x+y+1}{2} + y = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y \quad (36)$$

verwenden:

$$\begin{array}{rcccccc}
 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \vdots \\
 y = 4 & 14 & & & & & & \\
 y = 3 & 9 & 13 & & & & & \\
 y = 2 & 5 & 8 & 12 & & & & \\
 y = 1 & 2 & 4 & 7 & 11 & & & \\
 y = 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & & \\
 x = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots &
 \end{array} \tag{37}$$

Es gibt auch eine Verallgemeinerung des Lévy-Abstandes auf polnische Räume, die sogenannte **Prochorov-Metrik**, siehe beispielsweise [Els11, Definition 4.28, Satz 4.38].

2 Transfer vom CM zum GRG

Zum Beweis von Korollar 2.26: Nach Theorem 7.25 ist $\mathbb{P}(d_L(B_n^*, D^*) > \kappa) \rightarrow 0$, also ist

$$N_\kappa := 1 + \max\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d_L(B_n^*, D^*) \geq \kappa) \geq \kappa\} \tag{38}$$

wohldefiniert und endlich. Damit sei für alle $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \{N_{1/m}, N_{1/m} + 1, \dots, N_{1/(m+1)} - 1\}$

$$\varepsilon_n := \frac{1}{m} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \tag{39}$$

Für einen Multigraphen G mit Knotenmenge $[n]$ definieren wir mit der ZV

$$B_n^*(G) := d_{V_2^{(G)}} \tag{40}$$

den Grad eines uniform zufälligen Nachbarn $V_2^{(G)}$ eines gleichverteilten Knoten $V_1^{(G)}$ in G . Um Theorem 7.19 anzuwenden, definieren wir die Teilmenge

$$\mathcal{E}_n := \{G : d_L(B_n^*(G), D^*) < \varepsilon_n\} \tag{41}$$

der Multigraphen auf $[n]$. Dann erhalten nach Konstruktion

$$\mathbb{P}(\text{CM}_n(\mathbf{d}) \in \mathcal{E}_n) = \mathbb{P}(d_L(B_n^*, D^*) < \varepsilon_n) \geq 1 - \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \tag{42}$$

Auf diese Folge von Mengen \mathcal{E}_n von Multigraphen können wir Theorem 7.18 anwenden.

3 Größenverzerrte Verteilungen reloaded

Die größenverzerrte Verteilung ist für eine nicht-negative ZV W gegeben durch

$$\mathbb{P}(W^* \leq x) = \frac{\mathbb{E}[W \mathbf{1}_{\{W \leq x\}}]}{\mathbb{E}[W]}. \tag{1.2.4}$$

Wir haben in der **dritten Vorlesung** eine Erklärung für den Namen gegeben und für ganzzahlige ZVn D schon die Äquivalenz zu

$$\mathbb{P}(D^* = k) = \frac{k}{\mathbb{E}[D]} \mathbb{P}(D = k) \tag{1.2.2}$$

zeigt. Der Vorteil von Formel (1.2.4) ist, dass sie auch für nicht ganzzahlige ZVn funktioniert.

3.1 Größenverzerrte Erwartungswerte

Wir bestimmen jetzt den Erwartungswert von $f(W^*)$ für eine nicht-negative messbare Funktion $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$. Dazu prüfen wir, dass durch die Zuordnung

$$A \mapsto \frac{\mathbb{E}[W \mathbf{1}_A(W)]}{\mathbb{E}[W]} \quad (43)$$

für alle messbaren Teilmengen von \mathbb{R} ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert wird ($\mathbb{R} \mapsto 1$ und σ -Additivität mit majorisierter Konvergenz mit Majorante W). Dann stellt man fest, dass dieses Wahrscheinlichkeitsmaß die Verteilung von W^* sein muss, denn dank (1.2.4) stimmen sie auf dem \cap -stabilen Erzeuger $\{(-\infty, x]: x \in \mathbb{R}\}$ überein. Damit haben wir für alle messbaren Mengen $A \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(W^* \in A) = \mathbb{E}\left[\frac{W}{\mathbb{E}[W]} \mathbf{1}_A(W)\right] \quad (44)$$

gezeigt. Statt einer maßtheoretischen Induktion nehmen wir die Abkürzung über den Satz von Tonelli (Fubini für nicht-negative messbare Funktionen):

$$\mathbb{E}[f(W^*)] = \int_0^\infty \mathbb{P}(f(W^*) > t) dt \quad (45)$$

$$= \int_0^\infty \mathbb{P}(W^* \in f^{-1}((t, \infty))) dt \quad (46)$$

$$\stackrel{(44)}{=} \int_0^\infty \mathbb{E}\left[\frac{W}{\mathbb{E}[W]} \mathbf{1}_{f^{-1}((t, \infty))}(W)\right] dt \quad (47)$$

$$= \int_0^\infty \mathbb{E}\left[\frac{W}{\mathbb{E}[W]} \mathbf{1}_{\{f(W) > t\}}\right] dt \quad (48)$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{W}{\mathbb{E}[W]} \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{t < f(W)\}} dt\right] \quad (49)$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{W f(W)}{\mathbb{E}[W]}\right] = \frac{\mathbb{E}[W f(W)]}{\mathbb{E}[W]}. \quad (50)$$

Für Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathbb{E}[|f(W^*)|] < \infty$ bzw. $\mathbb{E}[W|f(W)|] < \infty$ gilt die Formel natürlich auch.

3.2 Größenverzerrte mixed Poisson-Verteilung

Mit der Erwartungswertformel können wir (7.7.11) prüfen. Für $D \sim \text{Poi}(W)$ erhalten wir

$$\mathbb{P}(D^* = k) = \frac{k}{\mathbb{E}[D]} \mathbb{P}(D = k) \quad (51)$$

$$= \frac{k}{\mathbb{E}[\mathbb{E}[D | W]]} \mathbb{E}[\mathbb{P}(D = k | W)] \quad (52)$$

$$= \frac{k}{\mathbb{E}[W]} \mathbb{E}\left[e^{-W} \frac{W^k}{k!}\right] \quad (53)$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{W}{\mathbb{E}[W]} e^{-W} \frac{W^{k-1}}{(k-1)!}\right] \quad (54)$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{-W^*} \frac{(W^*)^{k-1}}{(k-1)!}\right] \quad (55)$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{P}(\text{Poi}(W^*) = k - 1 | W^*)] \quad (56)$$

$$= \mathbb{P}(\text{Poi}(W^*) = k - 1). \quad (7.7.11)$$

Das passt zu der Tatsache, dass eine größenverzerrte ZV den Wert 0 fast sicher nicht annimmt, und der zufällige Nachbar eines zufälligen Knoten hat ja auch mindestens Grad 1.

4 Varianten des Konfigurationsmodells

Die ersten beiden Modifikationen des Konfigurationsmodells adressieren die Tatsache, dass normalerweise keine Cluster auftreten. Zum Messen von clustering dient der Clustering-Koeffizient



$$CC_G := \frac{\Delta_G}{W_G} = \frac{|\{\text{gelabelte Dreiecke}\}|}{|\{\text{„gelabelte Wedges“}\}|}, \quad (1.5.4)$$

wobei in der Anzahl der gelabelten Dreiecke

$$\Delta_G := \sum_{i,j,k \in [n]} \mathbf{1}_{\{ij, jk, ik \in E\}} \quad (1.5.2)$$

und in der Anzahl der „gelabelten Wedges“ = Pfade der Länge 2

$$W_G := \sum_{i,j,k \in [n]} \mathbf{1}_{\{ij, jk \in E\}} \quad (1.5.1)$$

aufgrund der Permutationen der Knoten alle Dreiecke sechs mal und alle „Wedges“ doppelt vorkommen. Trotzdem erhält man damit ein Maß für den Anteil der „geschlossenen Vs“:  an allen „Vs“: , also ein Maß dafür, wie vernetzt die Nachbarn sind.

4.1 Das hierarchische Konfigurationsmodell

Jeder Knoten im Konfigurationsmodell wird durch einen Graphen ersetzt, der eine lokale Struktur einfügt. Die Kanten, die das Konfigurationsmodell vorschreibt, werden an Kanten des eingepflanzten Graphen angebunden. Aufgabe 7.27 gibt ein konkretes Setting.

4.2 Das Konfigurationsmodell mit Clustern

Zusätzlich zum Knotengrad $d_i^{(\text{si})}$ wird die Anzahl $d_i^{(\text{tr})}$ an Dreiecken, in denen ein Knoten ist, vorgeschrieben. Im pairing scheme werden nach dem Verbinden der einfachen Kanten gemäß $d_i^{(\text{si})}$ noch die Dreiecke eingefügt, indem man in jedem Schritt einen Satz von drei Drittel-Dreiecken wählt und die drei zugehörigen Knoten verbindet. Bei geeigneten Regularitätsbedingungen analog zu Bedingung 7.8(a)–(c) soll man in Aufgabe 7.28 den Clustering-Koeffizient in diesem Modell ausrechnen.

4.3 Das gerichtete Konfigurationsmodell

Hier schreibt man einen Grad $d_i^{(\text{in})}$ für eingehende Kanten und einen Grad $d_i^{(\text{out})}$ für ausgehende Kanten vor. Beweise aus dem Kapitel sollen in den Aufgaben verallgemeinert werden.

Literatur

- [Els11] J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. 7. Aufl. Springer-Lehrbuch Grundwissen Mathematik. Springer, 2011, S. 451. DOI: [10.1007/978-3-642-17905-1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-17905-1) (siehe S. 5).