Zufällige Graphen

Christoph Schumacher

06. Juli 2020

RGCN I, Kap. 2.5, 8.1, 8.2:
Das Preferential Attachment Modell I

Zusammenfassung

Inhaltsverzeichnis

Fragen

1. Preferential Attachment liefert Multigraphen. Wie kommt man wieder zu einem einfachen Graphen? — In diesem Buch backen wir beim PA kleine Brötchen, das Modell ist schon komplex genug.

1 Martingale

Eselsbrücke zu Sub- und Supermartingalen: Im Kasino:

- X_k: Ergebnis des k-ten Spiels,
- M_n: Kontostand des Kunden nach dem n-ten Spiel,
- Werbung des Kasinos: *Super*martingale!
- Kontostand des Kunden nimmt jedenfalls in Erwartung nicht zu:

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid X_0, \dots, X_n] \leq M_n \tag{1}$$

Beispiel (Irrfahrt). Für $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ u. i. v. und integrierbar mit $\mathbb{E}[X_j] = 0$ ist $M_n := \sum_{j=1}^n X_j$ ein Martingal:

$$\mathbb{E}[|M_n|] \leq \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[|X_j|] < \infty \tag{2}$$

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid X_1, \dots, X_n] = \sum_{j=1}^n X_j + \underbrace{\mathbb{E}[X_{n+1}]}_{=0} = M_n. \tag{3}$$

Beispiel (Münzwurf). Seien $X_n \in \{-1,1\}$, $n \in \mathbb{N}$, unabhängig und gleichverteilt, und sei $M_0 \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$M_{n+1} := (M_n + X_{n+1})\mathbf{1}_{\mathbb{N}}(M_n) = \begin{cases} M_n + X_n & (M_n > 0), \\ 0 & (M_n = 0), \end{cases} \tag{4}$$

ein Martingal:

$$\mathbb{E}[|M_n|] \leq M_0 + n < \infty \tag{5}$$

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid X_1, \dots, X_n] = \mathbb{E}[(M_n + X_{n+1})\mathbf{1}_{\mathbb{N}}(M_n) \mid X_1, \dots, X_n] \tag{6}$$

$$= M_n \mathbf{1}_{\mathbb{N}}(M_n) + 0 = M_n. \tag{7}$$

Beispiel (Doob-Martingal). Sei $Y \in L^1$ und $X_0, X_1, \dots$ ZVn. Dann bilden $Y_n := \mathbb{E}[Y \mid X_0, \dots, X_n]$, $n \in \mathbb{N}_0$, ein Martingal:

$$\mathbb{E}[|Y_n|] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[|Y| \mid X_0, \dots, X_n]] = \mathbb{E}[|Y|] < \infty, \tag{8}$$

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} \mid X_0, \dots, X_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \mid X_0, \dots, X_{n+1}] \mid X_0, \dots, X_n] \tag{9}$$

$$= \mathbb{E}[Y \mid X_0, \dots, X_n] = Y_n. \tag{10}$$

Mittels Doob-Martingalen kann man manchmal Techniken zur Untersuchung der Irrfahrt auf die Untersuchung von Y approximiert durch $(M_n)_n$ übertragen.

Beispiel (Pólya-Urne). Eine Urne enthält anfangs eine blaue und eine rote Kugel. Im Schritt $n \in \mathbb{N}$ zieht man eine Kugel $X_n \in \{b, r\}$ und legt 2 Kugeln derselben Farbe wieder in die Urne hinein, so dass nach dem n-ten Schritt $n+2$ Kugeln in der Urne sind. Der Anteil M_n blauer Kugeln nach dem n-ten Zurücklegen ist ein Martingal bezüglich $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (M_n ist $\sigma(X_1, \dots, X_n)$-messbar, $\mathbb{E}[|M_n|] \leq 1\checkmark$):

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid X_1, \dots, X_n] = \frac{(n+2)M_n + 1}{n+3} M_n + \frac{(n+2)M_n}{n+3}(1 - M_n) \tag{11}$$

$$= \frac{M_n + (n+2)M}{n+3} = M_n. \tag{12}$$

1.1 Der Martingalkonvergenzsatz

Beispiel (Irrfahrt). nicht beschränkt, konvergiert nicht.

Beispiel (Münzwurf). M_n ist nicht-negativ es Supermartingal, also konvergent. Vorsicht: $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f. s.}} 0 =: M_\infty$, also

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[M_n] = M_0 \neq 0 = \mathbb{E}[M_\infty] \tag{13}$$

Beispiel (Doob-Martingal). Wenn Y $\sigma(X_0, X_1, \dots)$-messbar ist, dann

$$M_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f. s.}} Y. \tag{14}$$

Beispiel (Pólya-Urne). Konvergiert gegen (Beta-verteilte) ZV

1.2 Die Konzentrationsungleichung von Azuma und Hoeffding

Beispiel (Irrfahrt). Zusatzannahme: $|X_j| < K$ fast sicher:

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{1}{n^\tau}\sum_{j=1}^{n} X_j\Big| \geq a\Big) = \mathbb{P}(|M_n| \geq an^\tau) \leq 2\exp\Big(-\frac{a^2 n^{2\tau}}{2K^2 n}\Big) \tag{15}$$

ist für $\tau > \frac{1}{2}$ das schwache GGZ. Weil der Exponentialterm für alle $\tau > \frac{1}{2}$ sogar summierbar ist, folgt sofort das starke GGZ. Für $\tau = \frac{1}{2}$ erhalten wir eine dem ZGWS vergleichbare Abschätzung, wobei die Varianz durch K^2 nach oben abgeschätzt wurde.

2 Definition des PA

Wir prüfen, ob (8.2.1) eine Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert. Erste Beobachtung: Für alle $t \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{i\in[t]} D_i(t) = 2t, \tag{16}$$

denn am Anfang ist $t = 1$ und es gibt einen Knoten mit einer Schleife, also ist $D_1(1) = 2$. Danach kommt in jedem Schritt genau eine Kante dazu, also wächst die Summe aller Grade genau um 2. Insbesondere ist auch $D_i(t) \geq D_i(i) \geq 1$, so dass alle Zähler nicht-negativ sind. Damit ist schnell geklärt:

$$\frac{1+\delta}{t(2+\delta)+(1+\delta)} + \sum_{i\in[t]} \frac{D_i(t)+\delta}{t(2+\delta)+(1+\delta)} = \frac{1+\delta+2t+t\delta}{t(2+\delta)+(1+\delta)} = 1. \tag{17}$$

—

Beobachtung: Es ist

$$\sum_{t=i}^{\infty} \mathbb{P}(v_{t+1}^{(1)} \to v_i^{(1)}) = \sum_{t=i}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{P}(v_{t+1}^{(1)} \to v_i^{(1)} \mid \mathrm{PA}_t^{(1,\delta)})] \tag{18}$$

$$\overset{(8.2.1)}{=} \sum_{t=i}^{\infty} \mathbb{E}\Big[\frac{D_i(t)+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta}\Big] \tag{19}$$

$$\geq \sum_{t=i}^{\infty} \frac{1+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta} = \infty. \tag{20}$$

Da wir jedesmal unabhängig entscheiden, wohin sich der nächste Knoten verbindet, sagt das zweite Borel-Cantelli-Lemma, dass fast sicher unendlich viele Knoten ihre Kante bei i anschließen werden. Das heißt: der Grad eines jeden Knoten divergiert. Ich finde das insofern bemerkenswert, als dass der durchschnittliche Knotengrad immer $2m$ ist. Es gibt also zu jeder Zeit noch viel mehr Knoten, die den Minimalgrad m haben und dadurch den Durchschnitt klein halten, während sie warten bis noch viel viel viel mehr Knoten kommen und ihr Grad auch zu wachsen beginnt.

Mit demselben Borel-Cantelli-Argument kann man übrigens einsehen, dass unendlich viele Schleifen in das Preferential Attachment Modell eingebaut werden.

—

Bei $\delta = -1$ ist $\mathrm{PA}_t^{(m=1,\delta=-1)}$ nicht sehr zufällig, denn da ist

$$\mathbb{P}(v_{t+1}^{(1)} \to v_i^{(1)} \mid \mathrm{PA}_t^{(1,-1)}) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = 1, \text{ und} \\ 0 & \text{wenn } i > 1. \end{cases} \tag{21}$$

Das heißt, der Knoten 1 hat Grad $1 + t$ und alle anderen Knoten haben Grad 1. Allgemeiner: In $\mathrm{PA}_t^{(m,-1)}$ mit $m \geq 1$ hat der Knoten 1 Grad $m(t + 1)$ und alle anderen Knoten haben Grad m. In Figure 8.3 ist daher nicht $\delta = -1$ verwendet worden. Stattdessen vermute ich ein $\delta \in (-1, 0)$, denn die alten Knoten scheinen größeren Grad zu haben als in Figure 8.2.

—

Der entgegengesetzte Fall ist $\delta = \infty$: Da bildet man den Limes und erhält die Gleichverteilung

$$\mathbb{P}(v_{t+1}^{(1)} \to v_i^{(1)} \mid \mathrm{PA}_t^{(1,\infty)}) = \frac{1}{t+1}, \tag{22}$$

also kein Preferential Attachment mehr. Der Parameter $\delta \in [-1, \infty)$ regelt also die Stärke des Preferential Attachment, je größer δ ist, desto weniger fallen die Grade ins Gewicht.

—

In (24) sieht man, wie sich $\mathrm{PA}_t^{(1,\alpha)}(c)$ aus $\mathrm{PA}_t^{(1,\delta=0)}(b)$ und $\mathrm{PA}_t^{(1,\delta=\infty)}(b)$ zusammensetzt. Für $\alpha = \frac{\delta}{2+\delta}$ kommt $\mathrm{PA}_t^{(1,\alpha=\frac{\delta}{2+\delta})}(c) \overset{d}{=} \mathrm{PA}_t^{(1,\delta)}(b)$ heraus:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(v_{t+1}^{(1)} \to v_i^{(1)} \mid \mathrm{PA}_t^{(1,\alpha)}(c)\big) && (23)\\
&= \mathbb{P}\big(v_{t+1}^{(1)} \to v_i^{(1)} \mid I_{t+1} = 0, \mathrm{PA}_t^{(1,\alpha)}(c)\big)\mathbb{P}(I_{t+1} = 0)\\
&\quad + \mathbb{P}\big(v_{t+1}^{(1)} \to v_i^{(1)} \mid I_{t+1} = 1, \mathrm{PA}_t^{(1,\alpha)}(c)\big)\mathbb{P}(I_{t+1} = 1) && (24)\\
&= \frac{1}{t}\alpha + \frac{D_i(t)}{2t}(1-\alpha) = \frac{2\alpha + (1-\alpha)D_i(t)}{2t} && (25)\\
&\overset{\alpha:=\frac{\delta}{2+\delta}}{=} \frac{2\delta + 2D_i(t)}{2t(2+\delta)} = \frac{\delta + D_i(t)}{t(2+\delta)} && (26)\\
&= \mathbb{P}\big(v_{t+1}^{(1)} \to v_i^{(i)} \mid \mathrm{PA}_t^{(1,\delta)}(b)\big) && (27)
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\alpha = \frac{\delta}{2+\delta} = \frac{1}{\frac{1}{\delta}+1} \to \begin{cases} 0 & (\delta \to 0 \mathrel{\widehat{=}} \text{nur PA}),\\ 1 & (\delta \to \infty \mathrel{\widehat{=}} \text{reiner Zufall}). \end{cases} \tag{28}$$