Zufällige Graphen

Christoph Schumacher

16. Juli 2020

RGCN I, Kap. 8.9, 1:
Varianten des Preferential Attachment Modell und Überblick

Zusammenfassung
Varianten des Preferential Attachment Modells und Überblick

Inhaltsverzeichnis

Fragen

1. Was kann bei Definition 1.3 schiefgehen? — Beispiel: Limiten existieren nicht: Wechsele zwei Graphen in der Folge ab. Oder: Nimm $G_n := K_n$, also den vollständigen Graphen mit Knotenmenge $[n]$. Dann existieren die Limiten zwar, aber $p_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, und das ist keine Wahrscheinlichkeitsverteilung.

2. Braucht man sparse als Voraussetzung für scale-free? — Ja, denn erstens wird F mit Hilfe der p_k's aus Definition 1.3 definiert, und zweitens, wenn $(p_k)_k$ keine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, dann ist nach dem Lemma von Fatou $\sum_k p_k < 1$, also $\lim_{x\to\infty} 1 - F(x) > 0$, und der Limes in (1.4.3) existiert nicht.

3. Wenn $x \mapsto 1 - F(x)$ regularly varying bei unendlich mit Exponent $1 - \tau$ ist, ist dann F scale-free? — Ja. Wir müssen laut Definition 1.4 prüfen, ob

$$\frac{\log(L_X(x)x^{-(\tau-1)})}{\log(1/x)} = (\tau - 1) - \frac{\log(L_X(x))}{\log(x)} \xrightarrow{x\to\infty} \tau - 1 \tag{1}$$

gilt. Dafür eignet sich der folgende Darstellungssatz: Eine messbare Funktion L ist genau dann slowly varying, wenn es eine Zahl B und zwei beschränkte und messbare Funkionen $\eta, \varepsilon\colon [B, \infty) \to \mathbb{R}$ gibt, für die $\lim_{x\to\infty} \eta(x)$ existiert und $\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$ gilt, so dass für alle $x \geq B$

$$L_X(x) = \exp\Big(\eta(x) + \int_B^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\,\mathrm{d}t\Big). \tag{2}$$

Sei $\kappa > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ so, dass $\sup_{x\geq x_0} |\varepsilon(x)| < \kappa$. Dann erhalten wir für $x \geq x_0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\log(L_X(x))}{\log(x)} &= \frac{\eta(x) + \int_B^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\,\mathrm{d}t}{\log x} && (3)\\
&\leq \frac{\eta(x) + \int_B^{x_0} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^x \frac{\kappa}{t}\,\mathrm{d}t}{\log x} && (4)\\
&= \frac{\eta(x) + \int_B^{x_0} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \kappa\log x - \kappa \log x_0}{\log x} \xrightarrow{x\to\infty} \kappa, && (5)
\end{aligned}$$

denn η ist beschränkt.

Aufgabe 1.2: Beh: (1.4.7) $\Longrightarrow$ (1.4.8).

Sei $\tau > 1$ und $f_k \propto k^{-\tau}$. Wir möchten $1 - F(x) = \sum_{k>x} f_k \propto x^{-(\tau-1)}$ zeigen. Das Mittel der Wahl ist das Integralvergleichskriterium:

$$\frac{(x+1)^{-(\tau-1)}}{\tau-1} = \int_{x+1}^{\infty} \xi^{-\tau}\,\mathrm{d}\xi \le \sum_{k>x} k^{-\tau} \le \int_{x}^{\infty} \xi^{-\tau}\,\mathrm{d}\xi = \frac{x^{-(\tau-1)}}{\tau-1} \tag{6}$$

Der Vergleich mit $x^{-(\tau-1)}$ ergibt

$$1 \leftarrow (1+\tfrac{1}{x})^{-(\tau-1)} \le \frac{\tau-1}{x^{-(\tau-1)}} \sum_{k>x} k^{-\tau} \le 1. \tag{7}$$

—

Aufgabe 1.4: Sei G ein Graph mit $V(G) = [n]$ und $K := \max_{v\in[n]} d_v$. Zu einem Knoten $u \in [n]$ und $r \in [0,\infty)$ seien

$$S_r(u) := \{v \in [n] \colon \operatorname{dist}(u,v) = \lfloor r \rfloor\} \tag{8}$$
$$B_r(u) := \{v \in [n] \colon \operatorname{dist}(u,v) \le r\}. \tag{9}$$

Behauptung: Für alle $r \in [1,\infty)$ ist

$$|S_r(u)| \le K(K-1)^{\lfloor r \rfloor - 1}. \tag{10}$$

Beweis durch Induktion über $r \in \mathbb{N}$ und $S_r = S_{\lfloor r \rfloor}$:
IA: Für $r = 1$ ist $|S_1(u)| = d_u \le K = K(K-1)^0$.
IV: Sei (10) für ein $r \in \mathbb{N}$ erfüllt.
IS: Dann ist $|S_{r+1}(u)| \le (K-1)|S_r(u)| \le (K-1)\cdot K(K-1)^{r-1} \le K(K-1)^r$.
Das führt auf

$$|B_r(u)| = \sum_{j=0}^{r} |S_j(u)| \le 1 + \sum_{j=1}^{r} K(K-1)^{j-1} = 1 + K\frac{(K-1)^r - 1}{K-2}. \tag{11}$$

Wir notieren $H_n = \operatorname{dist}(U,V)$ mit $U, V \sim \mathcal{U}([n])$ unabhängig voneinander. Jetzt können wir mit $L_n := (1-\varepsilon)\frac{\log n}{\log(K-1)}$ schreiben:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(H_n \le L_n) &= \mathbb{P}(\operatorname{dist}(U,V) \le L_n) && (12)\\
&= \mathbb{P}(V \in B_{L_n}(U)) && (13)\\
&= \mathbb{E}[\mathbb{P}(V \in B_{L_n}(U) \mid U)] && (14)\\
&= \mathbb{E}\left[\frac{|B_{L_n}(U)|}{n}\right] && (15)\\
&\le \frac{1}{n} + \frac{K}{n}\frac{(K-1)^{L_n} - 1}{K-2} && (16)\\
&= \frac{1}{n} + \frac{K}{n}\frac{(K-1)^{(1-\varepsilon)\frac{\log n}{\log(K-1)}} - 1}{K-2} && (17)\\
&= \frac{1}{n} + \frac{K}{K-2}\frac{n^{1-\varepsilon} - 1}{n} && (18)\\
&= \frac{1}{n} + \frac{K}{K-2}\left(\frac{1}{n^{\varepsilon}} - \frac{1}{n}\right) && (19)\\
&\xrightarrow{n\to\infty} 0. && (20)
\end{aligned}$$