Konzentrationsungleichungen, Teil II

Übungsblatt 15

TU Dortmund, Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Ivan Veselić

Übung 29 (4 Punkte). Erinnerung: *Seien $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. Rademacher-Zufallsvariablen (d.h. $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = 1/2$). Dann ist der Vektor $X = (X_1, \dots, X_n)$ gleichverteilt auf dem binären Hyperwürfel $BHW := \{-1, +1\}^n$. Bezeichne*

$$\overline{X}^{(i)} = (X_1, \dots, X_{i-1}, -X_i, X_{i+1}, \dots, X_n)$$

den Vektor X mit geflippter i-ter Koordinate. Für $A \subset BHW$ ist der Einfluss der i-ten Variable auf das Ereignis A *definiert als*

$$I_i(A) := \mathbb{P}\left(\chi_{\{X \in A\}} \neq \chi_{\{\overline{X}^{(i)} \in A\}}\right).$$

a) Sei $A := \{x \in BHW : \sum_{i=1}^n x_i \geq 0\}$. Zeigen Sie, dass für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$I_i(A) \approx \frac{\text{Const}}{\sqrt{n}} \quad \textit{für} \quad n \to \infty.$$

(*Hinweis: Sie dürfen sich einfachkeitshalber auf ungerade n beschränken.)*

b) Interpretieren Sie das Ergebnis aus Teil a) im Kontext demokratischer Abstimmungen.

Übung 30 (4 Punkte). *(Wir verwenden weiterhin die Notation aus der vorheriegen Aufgabe). Der* totale Einfluss auf ein Ereignis $A \subset BHW$ *(oder die* Instabilität *von A) ist*

$$I(A) = \sum_{i=1}^n I_i(A).$$

Zeigen Sie:

$$I(A) \geq 4\mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A))$$

Abgabe und Besprechung am 24.10.2017 in der Übung.