Konzentrationsungleichungen, Teil II

Übungsblatt 16

TU Dortmund, Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Ivan Veselić

Erinnerung aus der Vorlesung:

Satz 4.10 (Subadditivität der Entropie)**.** Sei $\Phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $\phi(0) = 0$ und $\phi(x) = x \ln x$ sonst. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig mit Werten in einer abzählbaren Menge $\mathcal{X}$ und sei $f \colon \mathcal{X}^n \to [0,\infty)$, so dass $Z := f(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. Dann gilt:

$$\mathrm{Ent}(Z) := \mathbb{E}\Phi(Z) - \Phi(\mathbb{E}Z) \leq \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbb{E}^{(i)}\Phi(Z) - \Phi(\mathbb{E}^{(i)}Z)\right].$$

Übung 31 (4 Punkte)**.** *Vervollständigen Sie den in der Vorlesung gegebenen Beweis von Satz 4.10, indem Sie zeigen, dass es genügt, die Aussage im Fall $\mathbb{E}Z = 1$ zu zeigen.*

Übung 32. *Sei eine Familie von Graphen $\mathcal{G}(n)$, $n \in \mathbb{N}$ mit endlichen Kantenmengen gegeben. Wir definieren zufällige Teilgraphen $\mathcal{G}(m,p)$ durch Perkolation auf $\mathcal{G}(m)$ mit Parameter $p \in (0,1)$ (Kanten sind unabhängig voneinander aktiviert mit Wahrscheinlichkeit p und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ deaktiviert). Bezeichne $A(n,p)$ das Ereignis, dass $\mathcal{G}(n,p)$ zusammenhängend ist und setze $p_n := \frac{2\log n}{n}$*

a) Nehmen Sie an, dass gilt:

$$1 - \frac{1}{2n} \geq \mathbb{P}\left[A\left(n, p_n\right)\right] \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

Zeigen Sie dass dann für den totalen Einfluss auf $A(n,p_n)$ folgt:

$$I(A(n,p_n)) \geq \frac{1}{4\log^2 n}, \quad n \geq 2.$$

b) Nehmen Sie an, dass gilt:

$$3/4 \geq \mathbb{P}(A(n,p_n)) \geq 1/4.$$

Zeigen Sie dass dann für den totalen Einfluss auf $A(n,p_n)$ folgt:

$$I(A(n,p_n)) \geq \frac{n}{32\log^2 n}, \quad n \geq 2.$$

Abgabe und Besprechung am 14.11.2017 in der Übung.